



# Repetere og øve i matematikkundervisning

JANUAR 2018



Susanne Stengrundet  
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET (NTNU)

## Innholdsfortegnelse

|  |          |
|--|----------|
| <b>INNLEDNING .....</b>  | <b>3</b> |
| <b>REPETISJON.....</b>   | <b>3</b> |
| <b>ØVING.....</b>  | <b>4</b> |
| <b>LÆRING GJENNOM REPETISJON OG ØVING .....</b>                | <b>4</b> |
| <b>ØVING FOR SYSTEMATISERING OG SIKRING AV KUNNSKAPER.....</b> | <b>6</b> |
| <b>AUTOMATISERENDE ØVING.....</b>                              | <b>7</b> |
| <b>EKSEMPEL: FAKTORISERING .....</b>                           | <b>7</b> |

## Innledning

Når elevene begynner på et nytt klasstrinn eller en ny skole etter sommerferien, er ofte de første matematikktimene satt av til repetisjon, og når påsken nærmer seg, stresser lærere for å bli ferdig med «pensum» for å ha nok tid til repetisjon og øving.

Repetisjon og øving kan med andre ord legge beslag på store deler av skoleåret. Likevel er resultatene som oftest ikke så gode som vi ønsker.

I hverdagen vil læreren skille mellom repetisjon og øving. Repetisjon brukes når man tar opp et tema som man har jobbet med for en stund tilbake. Hensikten kan være at man vil forberede elevene på en prøve eller en eksamen. Repetisjon i starten av et nytt kapittel skal bidra til å koble sammen det nye lærestoffet med det elevene har lært tidligere. Øving blir gjerne brukt som trening for å feste lærestoffet. Elevene skal få erfaring med å anvende noe nytt de har lært, de kan få øvinger som skal utfordre og avklare forståelsen av ulike aspekter ved et begrep eller de kan få øvinger for å automatisere en regel eller en prosedyre. Felles for både repetisjon og øving er at de er nødvendig for å lære matematikk, men også at begge aktivitetene tar for mye tid hvis det ikke tilrettelegges godt.

Målet med denne artikkelen er å vise hvordan vi kan utnytte øving og repetisjon i en produktiv læreprosess.

## Repetisjon

Det første kapittelet i mange lærebøker inneholder en lang liste med emner som elevene har hatt i tidligere skoleår. Selv om det går under repetisjon, blir emnene gjerne presentert som om det er nytt stoff. «Elevene kan det ikke, derfor må vi gjennomgå det på nytt», er en uttalelse som høres ofte. Dave Hewitt (1996) mener at i slike sammenhenger vil de elevene som kan stoffet fra før av, kjede seg, og de elevene som ikke kan det, vil sannsynligvis ikke forstå stoffet noe bedre etter en ny gjennomgang. Allerede Einstein sa at man ikke kan løse et problem med samme tankegang som skapte det. Det vil si at elevene bør møte problemet på en nye måte.

Det betyr samlet sett at hvis repetisjon skal føre til dybdelæring, bør vi ikke gjennomgå lærestoffet som om det er nytt for elevene. Repetisjon må derfor inneholde mer enn gjentakelse og øving på det man skal kunne fra før, repetisjonen bør utfordre disse kunnskapene og ferdighetene. Slik som det ble belyst i modul 2 og 3, trenger elever som befinner seg i en overgangsfase (liminal space), varierte tilnærminger for å komme over terskelen (Pettersen og Brandell, 2017). Repetisjon på denne måten vil kunne føre til økt

relasjonell forståelse, fremme resonnering og invitere til metakognisjon og dermed til dybdelæring (Nosrati og Wæge, 2018).

Opplegget *Bretting av kvadratiske ark (lenke)* viser hvordan man kan repetere sentrale begreper i geometri uten en ny gjennomgang. Elevene skal for eksempel brette slik at de får en firedel av arkets areal på tre ulike måter. Dermed repeterer elevene ikke bare egenskaper til geometriske figurer, men i tillegg arealbegrepet og symmetri. De kan til og med bruke Pytagoras' setning når de skal begrunne sine løsninger. Oppgaven åpner for nye muligheter til forståelse. Papirbretting er en ny representasjon hvor reglene for konstruksjon byttes ut med andre måter å få fram figurene. Dette opplegget viser hvordan en i utgangspunktet enkel oppgave favner vidt, og mange begreper blir både repetert og øvd.

## Øving

Øving er ikke et ensartet begrep, men et sekkebegrep som omfatter mye forskjellig. Leuders (2012) skiller mellom

- øving som fører til forståelse
- øving til å forstå når og hvorfor man skal anvende en teknikk
- øving til problemløsning
- automatiserende øving

Ser vi bort fra den siste, kan disse øvingsformene gi elevene nye innfallsvinkler og tydeliggjøre sammenhengen mellom det nye og det som er kjent fra før, noe som er kjennetegn til dybdelæring (Nosrati og Wæge, 2018). Når lærere snakker om øving er det ofte den automatiserende øvingen de refererer til.

I gamle lærebøker er det gjerne mange oppgaver med samme vanskelighetsgrad. Tanken bak er at elevene skal terpe framgangsmåter til de sitter. Med dette menes at en algoritme skal sitte i hodet slik at den er klar til bruk ved senere anledninger. Det er ingen tvil om at noen emner skal øves så mye at man kan det automatisk. Læreren bør tenke nøye over hvilke algoritmer det er verdt å bruke så mye tid på. I slutten av denne artikkelen blir det gitt eksempler på algoritmer som elevene har stort utbytte av å ha automatisert.

## Læring gjennom repetisjon og øving

I artikkelen *Å utvikle elevers begrepsforståelse* (Pettersen og Brandell, 2016) blir terskelbegrepet diskutert. Det blir ikke bare vist hvor viktig disse begrepene er for videre læring, men også hvor selvfølgelig de for elevene når de først har forstått dem. Det er

viktigere å jobbe med slike terskelbegrep enn å sette av mye tid til ren repetisjon og automatiserende øving. Mens man har fokus på slike terskelbegrep, øver og repeterer elevene. Det betyr at læreren må ha kjennskap til elevenes forkunnskaper og tenke nøye over hvordan det nye emnet henger sammen med det som elevene har lært før. Elevene må forstå at de har bruk for det de kan fra før for å tilegne seg det nye lærestoffet. Repetisjon blir dermed integrert i det å lære noe nytt.

Eksempler på denne typen repetisjon finnes i opplegget *Sortering av firkanter* ([lenke](#)). Der blir elevene bedt om å ordne firkanter i en hierarkisk rekkefølge. Målet er for eksempel at alle elever skjønner at alle kvadrater er parallellogram, men ikke alle parallellogram er kvadrater. Mens elevene jobber med opplegget må de repeterer mange geometriske begreper som for eksempel parallell, like lang, rettvinklet eller halvere. Det å se geometriske figurer i en sammenheng og ikke hver for seg, blir tydeliggjort i et slikt opplegg. Mange elever kan få ny innsikt i sammenhenger mellom firkanter.

Opplegget *Fullstendig kvadrat* ([lenke](#)) starter med setningen: «Et fullstendig kvadrat er et andregradsuttrykk som vi kan faktorisere ved hjelp av den første eller den andre kvadratsetningen.» Teksten inneholder mange matematiske begreper som elevene må forklare med egne ord. Deretter blir elevene ledet gjennom et oppgaveark som inneholder både tegninger og algebraiske uttrykk slik at «fullstendig kvadrat» og «halvere, kvadrere, addere» blir mer enn bare en frase. Uttrykkene får et begrepsmessig innhold.

Leuders (2012) kaller det øving gjennom problemløsning. Dette er viktig for alle typer elever. Lærere kan ha en forestilling om at elevene må øve inn algoritmen først, og når den sitter, kan man anvende den til å løse mer spennende oppgaver. Denne tankegangen kan føre til at lavt presterende elever ikke får sjansen til å jobbe med kognitivt utfordrende oppgaver. De blir sittende fast i automatiserende øving. Alle typer elever bør kunne arbeide med gode oppgaver som trener dem i visse fremgangsmåter og samtidig fører til at de får bedre forståelse for lærestoffet. De kan oppnå dybdelæring gjennom slik øving. Hvis eleven opplever mestring, vil de endre holdning til problemløsning. Og de skal lære å bli bevisste på sin egen strategi både når de lykkes og når de står fast. Gir de opp og spør læreren, eller har de strategier til å finne en vei videre ved å tegne, forenkle, prøve og feile eller diskutere med medelever?

Elevene har forskjellig utgangspunkt, og derfor ulike muligheter for hva de kan lære. [LIST-oppgaver](#) (Lav Inngangsterskel Stor Takhøyde) er rike oppgaver som kan tilpasses de fleste elever.

Øving kan gi elevene en dypere forståelse. En måte å oppnå dette på kan være å se på feilsvar. Ta vare på slike feilsvar og få fram tenkingen som fører til feil. For eksempel kan man i arbeidet med forståelsen av brøk gi elevene i oppgave å forenkle brøken  $\frac{20n+15}{5}$ . Be dem skrive løsningen på et ark og levere det inn. Læreren har på forhånd bestemt seg for å skille ut de løsningene som kun forkorter 5 mot 15 slik at løsningen blir  $20n + 3$ . Det går fort å skille ut alle disse løsningene fra de andre, og det gir læreren en liten oversikt over hvor mange som fremdeles har denne misforståelsen. Så kan læreren ta dette problemet opp i fellesskap. Elevene vet at det er mange som har samme misforståelse, det er ingen skam. Læreren er tydelig på at det er verdifullt at en slik feil blir synlig slik at man kan ta den opp og arbeide med å avklare misforståelsen. Dette er et øyeblikk for god læring.

## Øving for systematisering og sikring av kunnskaper

Når elevene øver får de erfaring i å anvende det de har lært. Gode oppgaver lar dem få anvende den nye kunnskapen i ulike sammenhenger, de får øve på både enkle og mer sammensatte problemer. De får øving i å bruke nye regler og nye algoritmer i varierte situasjoner. Tida man bruker til systematisering og sikring av kunnskaper, er velanvendt. Det er nødvendig å reflektere over det som man har lært. Elevene bør bli bevisst på hvordan nytt stoff henger sammen med det som er lært tidligere. Det gjelder å lage et nettverk av kunnskaper. Hvis kunnskapene er lagret i nettverk, er de mer stabile. Hvis en tråd ryker, faller ikke hele kunnskapsbygningen sammen. Elever som ser sammenhenger, har verktøy til å reparere hullet. Systematisering og sikring av det som skal læres, skjer i den oppsummerende klassesamtalen. Der bygger elevene opp en felles forståelse og et felles språk slik at de kan kommunisere i og med matematikk.

Hvis lærere må gjenta samme forklaring til elevene mange ganger, har elevene mest sannsynlig blitt stående i overgangsfasen. De kan sitte igjen med noen algoritmer som tilsynelatende fungerer uten at de klarer å sette dem i sammenheng med de nye utfordringene i begrepsforståelsen. Eller de kan ha fått med seg brokker av kunnskapen man har arbeidet med i terskelbegrepet. De har ikke forsert terskelen som åpner for ny kunnskap.

Øving og repetisjon skal brukes til å utvide og befeste kunnskaper, til å hjelpe elever gjennom overgangsfasen og oppnå dybdelæring.

## Automatiserende øving

Automatiserende øving skiller seg som nevnt fra alle andre typer øving. Her gjelder det å pugge algoritmer til man kan dem i søvne. Disse må øves jevnt gjennom hele skoleåret, men i korte sekvenser. Hensikten med denne øvingen er å automatisere utvalgte algoritmer slik at de ikke opptar tankekapasitet. Elever som ikke bruker tid å fremkalle enkle algoritmer, vil kunne bruke energien sin på å lære noe nytt og er da bedre rustet til å arbeide med mer kognitivt krevende oppgaver. Det vil si at de oppnår flyt i oppgaveløsingen (NTCM 2014).

Elevene får store fordeler hvis de for eksempel automatiserer

- grunnleggende tallregning
- multiplikasjonstabellen
- konvensjoner om regnerekkefølge
- omregninger mellom måleenheter
- faktorisering
- enkel derivasjon

De siste to gjelder spesielt for elever på videregående skole som velger teoretisk matematikk.

## Eksempel: Faktorisering

Faktorisering er et nyttig verktøy i veldig mange emner i matematikk. Mye av matematikken på vg2 og vg3 er såpass teoretisk og vanskelig at elevene har en stor fordel hvis de ikke behøver å bruke mye kapasitet og tid på å finne ut om og hvordan man kan faktorisere et uttrykk. De må kjenne til ulike algoritmer for faktorisering og ikke minst hvilken metode som passer best i en gitt situasjon.

I grunnskolen er faktorisering gjerne ensbetydende med primtallfaktorisering. For eksempel er  $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ . Men vi kan faktorisere  $12 = 2 \cdot 6$  eller  $12 = 3 \cdot 4$ . I ungdomsskolen faktorerer elevene enkle algebraiske uttrykk ved «å sette utenfor parentes», men først på videregående skole lærer elevene at faktorisering er nødvendig for blant annet å løse likninger og ulikheter.

Å se på multiplikasjon som areal i tillegg til gjentatt addisjon, kan føre til en utvidet forståelse (Valenta, 2015). Ved bruk av arealmodellen vil elevene veksle mellom visuell og algebraisk representasjon. Forskjellige representasjoner være til hjelp for å oppnå dybdelæring (Nosrati og Wæge 2018).

Elevene må kjenne til mange metoder for faktorisering, vurdere dem mot hverandre og bruke den som gir det ønskede resultatet mest effektivt. Det vil si at de må skaffe seg en oversikt over ulike faktoreringsmetoder og lage en struktur.

Én mulig strukturering som kan hjelpe elevene til å bestemme hvilken metode som er den beste for å faktorisere andregradspolynomer kan være:

- *Faktorisering ved å sette utenfor parentes*
- *Faktorisering med 1. og 2. kvadratsetning*
- *Faktorisering med konjugatsetning*
- *Faktorisering med arealmodellen*
- *Faktorisering med andregradsformelen*
- *Faktorisering med fullstendig kvadrat*

Hvis elevene lærer hva de må se etter for å kunne bruke de ulike metodene, vil de etter hvert oppnå det som kan kalles flyt i oppgaveløsning. Faktorisering blir da et verktøy for å løse problemer.

#### Kilder:

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (2012). *Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern: Konzept und Umsetzung in der Mathewerkstatt*. Universitätsbibliothek Dortmund.

Hewitt, D. (1996). Mathematical fluency: The nature of practice and the role of subordination. *For the learning of mathematics*, 16(2), 28-35.

Leuders, T. (2012). *Einüben oder Ausüben?: Übekonzepte im Mathematikunterricht*. na.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*.

Nosrati, M., Wæge, K. (2018). *Dybdelæring i matematikk*. Matematikksenteret (NSMO)

Petterson og Brandell (2016). *Å utvikle elevers begrepsforståelse*. Matematikksenteret (NSMO)

Valenta, A (2015). *Tallforståelse*. Matematikksenteret (NSMO)