Å utvikle elevers begrepsforståelse

APRIL 2018

NATURFAGSENTERET
NASJONALT SENTER FOR NATURFAG I OPPLÆRINGA

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Kerstin Petterson, Stockholms universitet og Gerd Brandell, Lunds universitet

ORIGINALTITTEL: ATT UTVECKLA ELEVERS BEGREPPSFÖRMÅGA

OVERSATT OG BEARBEIDET AV ANNE-MARI JENSEN, MATEMATIKKSENTERET

NTNU

Innholdsfortegnelse

Innledning

Matematiske begrep er viktige byggesteiner i matematikken. Matematikkursene i Gymnasieskolan[1] inneholder mange begrep, både slike som elevene har møtt før, som for eksempel funksjonsbegrepet, men også helt nye begrep som derivert og integral. I følge læreplanen for matematikk i Gymnasieskolan er ett av målene at undervisningen skal gi elevene forutsetninger for å utvikle evnen til å anvende og beskrive matematiske begrep samt sammenhengen mellom begrep. I kommentarene til læreplanen beskrives ytterligere hva som menes med begrepsforståelse. Her fremgår det at begrepsforståelse omfatter å kunne gjøre rede for begrepers definisjoner og egenskaper. I kommentarene påpekes det også at innholdet i et begrep framfor alt gis gjennom måten begrepet brukes på i ulike sammenhenger i matematikken og i anvendelser. Dessuten innebærer begrepsforståelse «å kunne anvende begrep og vite hvorfor begrepene er viktige, i hvilke situasjoner de er anvendbare og hvordan ulike representasjoner kan være anvendbare for ulike formål» (Skolverket, 2015). Begrep kan representeres på ulike måter, gjennom ord, bilder og symboler. Hvert begrep må ha et navn, men å utvikle sin begrepsforståelse innebærer mye mer enn å utvikle sitt ordforråd.

Det er en utfordring å legge opp undervisningen slik at elevene utvikler allsidige kunnskaper omkring begrep for å kunne anvende dem effektivt ved problemløsning og for å utvikle forståelse for matematiske strukturer og sammenhenger. Undervisningen kan ikke bare ensidig fokusere på anvendelser i typeoppgaver, den må også inneholde beskrivelser og ulike representasjoner av begrepet, sammenhenger med andre begrep og teori om hvordan begrepet kan forstås i ulike matematiske sammenhenger.

Terskelbegrep

Matematikkursene i Gymnasieskolan inneholder mange begrep, men visse begrep blir mer avgjørende for elevenes matematiske utvikling enn andre begrep. Elevene må kunne beherske disse begrepene for å kunne nyttiggjøre seg den matematikken som behandles. Meyer og Land (2005) har introdusert uttrykket *terskelbegrep* (på engelsk *treshold concept*) for slike begrep. Terskelbegrep er vanskelige å lære for de fleste elever, men når man har tilegnet seg kunnskaper om et slikt begrep åpner det seg helt nye muligheter for å lære mer

[1] Den svenske videregående skolen. I Matematiklyftet, hvor denne artikkelen er hentet fra, hører artikkelen til i en pakke for høyskoleforberedende matematikkundervisning.

matematikk. Derivasjon er et eksempel på et terskelbegrep som blant annet gjør det mulig å forstå funksjoners egenskaper.

Potensialet i et terskelbegrep består ikke bare av selve begrepets muligheter, men også av at kunnskap om et terskelbegrep åpner for videre læring av hele det matematiske området der begrepet inngår. Det gir nye muligheter og et nytt syn på området. Man kan sammenligne det med å ta seg gjennom en portal. Når portalen er passert, åpner det matematiske området hvor begrepet har en avgjørende rolle seg fra et nytt perspektiv. Man kan også billedlig si at å innhente kunnskaper om et treskelbegrep er som å gå over en terskel, det kreves anstrengelse for å ta seg over terskelen. Terskelbegrepene er vanskelige å lære siden de kan virke uforenlige med tidligere etablerte kunnskaper, eller medføre at en tidligere intuitiv oppfatning ikke lenger fungerer. Dette innebærer at elever iblant viser motstand mot å forandre sin tidligere oppfatning, eller at de velger å bare forholde seg til hvordan man skal løse oppgaver der begrepet inngår. Men ettersom terskelbegrep har potensial til å forandre elevers syn på et helt område, og ofte er koblet til mange begrep, er det svært viktig at undervisningen legger opp til at elevene skal utvikle forståelse for disse begrepene og deres innhold.

Terskelbegrep karakteriseres av at de er *vanskelige å lære, transformative, integrative* og *irreversible*. At de er vanskelige å lære innebærer at det kreves anstrengelse for å tilegne seg kunnskaper om terskelbegrepet. At de er transformative handler om at kunnskap om et terskelbegrep gir et endret syn på et matematiske område, elevens oppfatning av området transformeres. Transformasjon tar ofte lang tid, det kan handle om flere måneder, det er sjelden en plutselig innsikt. At terskelbegrep er integrative innebærer at kunnskap om terskelbegrepet synliggjør tidligere skjulte sammenhenger mellom begreper innenfor området, og tidligere fragmentariske kunnskaper kobles sammen, man kan si at ting faller på plass. Terskelbegrep er irreversible i den betydning at når den nye forståelsen er etablert, er det vanskelig å gå tilbake til det synet man opprinnelig hadde på området. Terskelbegrepene har en tendens til å oppfattes som selvfølgelige når terskelen er vel passert. For undervisning om terskelbegrep innebærer dette at vi må regne med at det tar tid for elevene å tilegne seg kunnskap om begrepet men også at det er vel anvendt tid. Som lærere må vi også tenke på hvordan elever som ikke har passert terskelen kan oppfatte begrepet. Dette er spesielt utfordrende når noen elever i gruppen har passert terskelen mens andre ikke har det.

Elevers utvikling av kunnskap om et terskelbegrep inkluderer en språklig utvikling mot en mer emnespesifikk måte å snakke om begrepet på, inklusive formelle uttrykk og symbolspråk. En måte å støtte elevene i arbeidet med å passere terskelen i undervisningen, er derfor å inkludere aktiviteter som utvikler elevens emnespesifikke språk i forbindelse med begrepet. Når eleven selv bygger sine kunnskaper om et terskelbegrep, kan det innebære en forandring av elevens selvoppfatning. Eleven kan komme til å oppfatte seg som en mer matematisk person og utvikle en større sikkerhet og selvtillit angående sin evne til å beherske begrepet og området det handler om.

Terskelbegrepet funksjon

Et terskelbegrep som inngår i alle matematikkursene i videregående skole er *funksjon*. Funksjonsbegrepet er vanskelig å lære, transformativt, integrativt og irreversibelt. Å gå fra en tidlig oppfatning av hva en funksjon er, til å oppfatte funksjoner som matematiske objekter, kan være en vanskelig prosess og kan derfor ta lang tid. Med begrepet funksjon får elevene tilgang til et kraftfullt redskap som kan anvendes sammen med flere andre begrep. Velutviklede kunnskaper om funksjonsbegrepet innebærer at eleven kan koble sammen tidligere fragmentariske kunnskaper, hvilket også innebærer at disse kunnskapene blir bevart.

I formell matematikk innføres begrep via formelle definisjoner. For å beskrive et begrep og støtte en videre tolkning av begrepets innhold, brukes ofte en definisjon av begrepet i undervisningen. Denne definisjonen er da tilpasset sammenhengen og elevenes kunnskaper. Følgende er et eksempel på en formulering av definisjonen av en funksjon som ifølge faglitteratur brukes i høyere utdanning.

> **Definisjon.** En *funksjon* er en regel som til hvert objekt i en definisjonsmengde tilordner nøyaktig ett objekt i en gitt målmengde.

Elever bygger til dels opp sin kunnskap gjennom å tolke begrepsdefinisjoner, men for en stor del skaper de sine tolkninger av et begrep gjennom de representasjoner, beskrivelser og eksempler som de møter i undervisningen. Tolkningene utvikles ytterligere når elevene løser oppgaver og anvender begrepet i problemløsning. For eksempel kan eleven tenkes å assosiere begrepet funksjon med betegnelsen $f(x)$, verditabeller, koordinatsystem, grafer, andregradspolynom og parabler. Men begrepsdefinisjonene er en del av den emnespesifikke måten å omtale et begrep på, og fyller derfor en viktig funksjon i utviklingen av elevens begrepsforståelse.

Begrepet funksjon introduseres tidlig i grunnskolen, når elever beskriver mønster og tallfølger og arbeider med proporsjonalitet. Funksjoner illustreres iblant med funksjonsmaskiner. Da blir det tydeligere at for hvert innmatet objekt, nesten alltid et tall i eksempler som brukes i skolen, kommer det ut et objekt, også dette som oftest et tall. Derimot blir den egenskapen som er spesifikk for funksjoner, at hvert innmatet objekt gir *nøyaktig ett* objekt som resultat, ikke like tydelig. De bruker heller ikke å spesifisere mengden som de innmatede objektene velges fra, *definisjonsmengden*, ei heller den mengden som objektene som kommer ut av funksjonen tilhører, *målmengden*. I kurs 1 i den svenske Gymnasieskolan brukes et mer allment funksjonsbegrep, men i kursene 3, 4 og 5 anvendes nesten utelukkende mengden av reelle tall som definisjonsmengder og målmengder. I og med at målmengden nesten alltid er de reelle tall, brukes ikke begrepet målmengde i gymnasiekursene. Derimot defineres begrepet *verdimengde* (mengden av alle funksjonsverdier). I Norge brukes ikke noe allment funksjonsbegrep før på universitet- og høgskolenivå.

I neste avsnitt beskrives terskelbegrepet *derivert* og flere aspekter av dette begrepet som undervisningen må forholde seg til.

Terskelbegrepet derivasjon

Derivasjon er et sentralt begrep i differensial- og integralregning. Sammen med begrepene grenseverdi, kontinuitet og integral legger derivasjon grunnlaget for teorien. Derivasjon handler om å beskrive forandring, om differenser og lineær tilnærming. Begrepet integral handler om uendelige summer. Både derivasjon og integral defineres ved hjelp av grenseverdier og begrepene knyttes sammen av analysens fundamentalsetning[2]. Av disse begrepene er det den deriverte som får størst plass i Gymnasiskolans kurs, og det samme gjelder i matematikkursene i videregående skole i Norge. Det inngår som sentralt begrep i 1T, kommer igjen i R1, S1 og S2, og inngår i differensiallikninger i R2. Det er derfor gode grunner til å legge stor vekt på utviklingen av elevens forståelse og ferdigheter knyttet til den deriverte. I høyere utdanning kommer derivasjon igjen i forbindelse med studier av

[2] Analysens fundamentalsetning sier at derivasjon og integrasjon er hverandres inverser. Det vil si at hvis en kontinuerlig funksjon først integreres og deretter deriveres, ender vi opp med den opprinnelige funksjonen.

størrelsers forandringer på mange områder. I de første matematikkursene i høyere utdanning inngår alltid differensial- og integralregning.

En modell for begrepsutvikling som forekommer i forskningslitteraturen er at elever utvikler begrepsforståelse fra «prosess» til «objekt». For eksempel kan en elev først oppfatte *addisjon* som en prosess – å addere – og senere oppfatte en sum som et objekt. En *funksjon* kan først oppfattes som en prosess – beregning av funksjonsverdier – og senere som et objekt med visse egenskaper.

For den deriverte er utviklingen fra prosessen – å derivere – til et objekt komplisert. Det er flere grunner til dette. Én er at objektet den deriverte ikke er et enkelt objekt. Den deriverte kan oppfattes som et *lokalt objekt* som beskriver en punktvis egenskap hos funksjonen den går ut fra - å ha en tangent med en viss stigning eller å kunne tilnærmes lineært. Den deriverte kan også oppfattes som et *globalt objekt*, som en funksjon som er knyttet til den opprinnelige funksjonen – som et mål på funksjonens endringshastighet. Den kan også være et objekt som er en *ukjent i en likning* – en differensiallikning der den derivertes egenskaper knyttes til den opprinnelige funksjonens egenskaper. Sammenhengen mellom disse ulike objektene og deres egenskaper er ikke lett synlig for elevene.

Ytterligere en årsak til at sammenhengen mellom prosessen og objektet/objektene er komplisert for den deriverte, beror på at den deriverte defineres som en grenseverdi. Det fins mange forskningsstudier som viser at grenseverdibegrepet er vanskelig også for studenter ved universiteter og høgskoler (for eksempel Juter, 2009), både begrepsmessig og å håndtere i problemløsning. Et hinder er å kunne gå fra å oppfatte grenseverdi som en prosess – grenseverdi er noe dynamisk – til å oppfatte grenseverdi som et objekt – grenseverdi er et tall eller et uttrykk med visse egenskaper. Det oppstår mange misoppfatninger som også hemmer evnen til å løse problemer ved hjelp av grenseverdier. I videregående skole presenteres grenseverdibegrepet i 1T, R1 og S1 ganske overfladisk, kanskje av plasshensyn, men også fordi grenseverdi er et begrep som er vanskelig, spesielt om man bruker den formelle epsilon-delta-definisjonen. Dermed kommer den formelle definisjonen av den deriverte ikke til å være tilgjengelig for elevene i videregående skole. Ettersom man bare kan forutsette et intuitivt grenseverdibegrep skolematematikken, oppstår det problemer med undervisningen om derivasjon. Disse problemene fører lett til at oppgaver om derivasjon stagnerer på et teknisk nivå. Hvis ikke undervisningen motvirker dette, risikerer elevenes arbeid å bli sterkt praksisorientert med svakt utviklet logos[3]. Elever med

[3] Logos handler om å vite hvorfor oppgaver kan løses på en bestemt måte, det vil si å kunne beskrive, argumentere for, og forklare metodene og fremgangsmåtene.

svakt utviklet logos vil ha vanskeligheter med å begrunne, argumentere for, og bevise de metodene de bruker. Det begrenser muligheten for å oppnå en helhetlig forståelse for matematikkens strukturer.

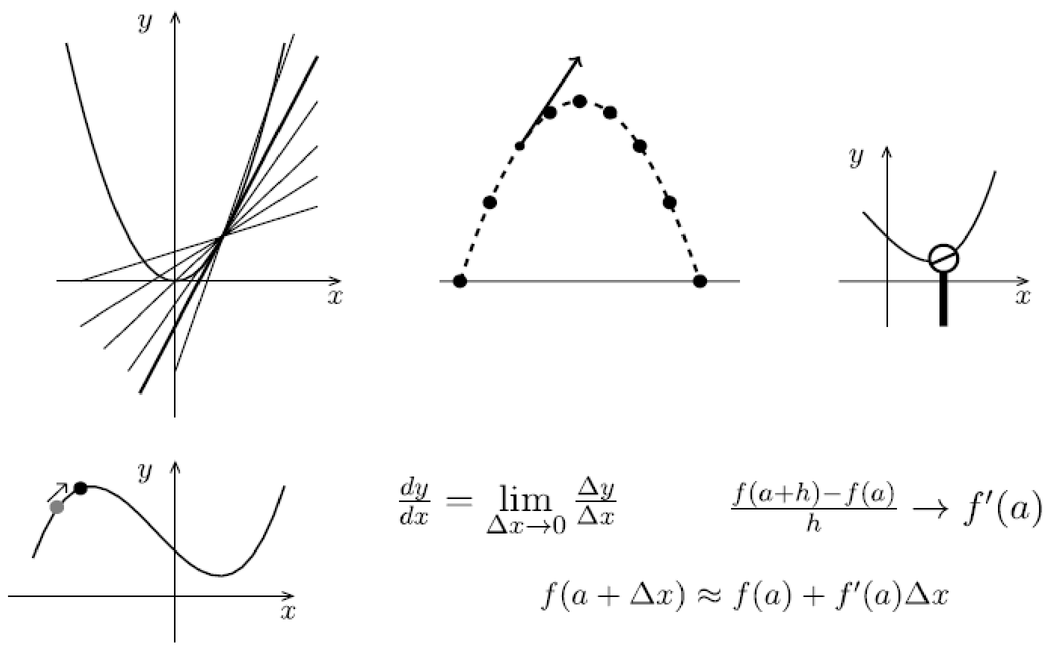
Elevene må derfor utvikle sin forståelse av den deriverte ut fra mer intuitive forestillinger om grenseverdi. En rekke forskningsstudier fra ulike land viser at undervisning som utvikler elevenes tenkning om den «iboende» grenseverdien, kan gi godt resultat. Den derivertes «iboende» grenseverdi kommer til uttrykk på ulike måter, ofte som dynamiske forløp:

- den deriverte oppfattes som en grenseverdi av en differensialkvotient, funksjonsdifferensen delt på argumentdifferensen (dette er den formelle definisjonen)
- tangenten oppfattes som en grenseposisjon for en sekant som går gjennom et fast punkt og et nærliggende punkt som nærmer seg det faste punktet
- en funksjonsgraf er lokalt «lineær», det vil si at grafen i stor forstørrelse ser ut som en rett linje, og det stemmer bedre og bedre jo større forstørrelsen er
- innenfor kinematikken oppfattes momentan hastighet som grenseverdien til gjennomsnittshastigheten over et stadig kortere tidsintervall
- vekstfarten i et punkt på en funksjon oppfattes som grenseverdien for vekstfarten over et stadig kortere intervall
- den lineære tilpasningen passer stadig bedre til funksjonen jo mindre intervall man betrakter.

Resultatene fra undervisning som utvikler elevenes tenkning om den «iboende» grenseverdien til den deriverte, har blitt målt både med tester og intervjuer i tilknytning til undervisningsforløpet, og med tester lengre tid etter at undervisningsforløpet er ferdig. For eksempel redegjør Markus Hähkiöniemi (2006) i sin doktoravhandling for en studie fra et finsk gymnas. Studiet er et designstudium for 5 timers undervisning som introduserer derivasjon. Hensikten er å forsterke begrepsforståelsen. Metoden er å gi elever oppgaver som lar dem arbeide med funksjonsgrafer og andre representasjoner av funksjoner og deres forløp før den deriverte blir innført. I avhandlingen fins referanser til mange lignende studier fra andre land.

Tolkningen ovenfor av den derivertes «iboende» grenseverdi har ulike kvaliteter, man kan si at de befinner seg i ulike «verdener». Ifølge David Tall kan man bevege seg i tre ulike verdener når man tenker og kommuniserer om matematikk. I den første verden, som bygger på sanseinntrykk, representeres matematikken av visualiseringer og kommuniseres i tillegg til språk også med gester og handlinger. Sammenhenger motiveres med at man «ser» at det stemmer. Tall bruker ordet embodied (kroppsliggjort) for den første verden. Vi kan bruke ordet konkretisert. Ofte handler det om visualisering. I den andre verden, den symbolske, bruker man matematiske symboler og språk. Sammenhenger motiveres med manipulasjoner av symboler etter bestemte regler. I den tredje verden, den formelt-aksiomatiske, bygges matematikken opp som en logisk sammenhengende teori. De matematiske begrepene defineres ut fra sine egenskaper. Sammenheng motiveres ut fra aksiomer, definisjoner og setninger. Resultatet av Talls mangeårige arbeid sammen med andre forskere om blant annet de tre verdenene beskriver han i boka *How humans learn to think mathematically* (Tall, 2013).

Videregående skoles matematikk beveger seg i Talls to første verdener. I figur 1 vises noen billedlige og symbolske representasjoner for den derivertes «iboende» grenseverdi i den første og andre verden. Hvis elevene lykkes i å knytte sammen uttrykk for den derivertes iboende grenseverdi i den første verden med representasjoner og regler i den andre verden, skapes et grunnlag for en velutviklet begrepsforståelse.



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$$

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

Figur 1. Noen uttrykk for den derivertes «iboende» grenseverdi i Talls første og andre verden, den kroppsliggjorte og den symbolske. Formlene kan også gi mening i Talls tredje verden, den formelle.

I undervisningen i videregående skole dukker den deriverte opp i flere ulike sammenhenger i 1T, R1, R2, S1 og S2. Man undersøker funksjoners lokale egenskaper i forbindelse med definisjonen. Man utleder eller motiverer derivasjonsregler. Man analyserer funksjoners globale egenskaper. Man studerer hvilke sammenhenger som finnes mellom en funksjon og dens deriverte. Man modellerer situasjoner der forløpet beskrives med funksjoner. Man studerer den omvendte prosessen, å integrere og finne en antiderivert funksjon. Hvis læreren benytter muligheten til i hver ny sammenheng å løfte fram den iboende grenseverdien hos den deriverte på en relevant måte, kan det hjelpe elevene til å forsterke sin begrepsforståelse og knytte sammen representasjoner for den deriverte i Talls første og andre verden, den konkretiserte/visualiserte og den symbolske.

For undervisning i forhold til terskelbegrep generelt blir det ekstra viktig at elevene får mye støtte i å knytte sammen de ulike verdenene. I neste avsnitt beskrives hvordan elever, når de arbeider med å lære et terskelbegrep, passerer en fase med usikkerhet, der støtten som undervisningen gir kan bli avgjørende for elevenes kunnskapsutvikling.

Liminal space – overgangsfasen preget av usikkerhet

I arbeidet med å erobre et terskelbegrep passerer eleven en fase der kunnskapen er ustabil. Eleven kan ha alt klart for seg det ene øyeblikket, for i neste sekund å ha mistet tankebanen. Denne fasen har Meyer og Land (2005) kalt *liminal space* [4]. Det er en sjanse for at eleven ikke lykkes i å overvinne de vanskelighetene som det innebærer å tilegne seg kunnskaper om et terskelbegrep og dermed blir stående fast i denne fasen. Forskning viser at elever som altfor lenge befinner seg i denne fasen, kan lage seg måter å klare seg på uten å ta seg over terskelen. Elevene lærer for eksempel definisjonen utenat, eller lærer bare visse metoder og prosedyrer som forbindes med begrepet. Ettersom disse måtene å forholde seg på ikke er videreutviklingsbare kan det føre til at eleven får problemer senere i sin kunnskapsutvikling.

At terskelbegrep er transformative og integrative viser at elevers kunnskaper om terskelbegrep kan påvirke elevenes kunnskaper innenfor hele det matematiske området der begrepet finnes. Det gir resultater hvis man velger å legge tid og krefter i terskelbegrepene i undervisningen. Forskning viser at transformasjonen tar lang tid og at elevene trenger mye støtte for å ta seg forbi overgangsfasen (Petterson, Stadler og Tambour, 2013). Det kan være fristende å gjøre forenklinger for å slippe terskelen, men studier indikerer at det senere kan skape hindringer for elevenes kunnskapsutvikling. Det gjelder å være utholdende og ikke vike for terskelen. Elevene trenger kunnskap om terskelbegrepene også for å komme videre inn i andre

[4] Begrepet *liminal space* er oversatt til *overgangsfase* på norsk. Fasen er også beskrevet som en fase preget av usikkerhet.

matematiske områder som forutsetter forståelse for dette begrepet. For undervisningen innebærer dette både vanskeligheter og muligheter. Undervisningen må støtte elevene slik at de passerer overgangsfasen og får mulighet til en godt utviklet forståelse av de matematiske områdene og begrepene som de studieforberedende kursene behandler.

Både praksis og logos trengs

Praksis og logos er sentrale begrep innenfor den antropologiske teorien for didaktiske fenomen (ATD) og didaktiske situasjoner (TDS)[5]. Praksis handler om å vite hvordan noe skal gjøres og omhandler oppgaver og teknikker, altså metoder. Logos omfatter teori og argumentasjon, og handler om å vite hvorfor oppgaver kan løses på en bestemt måte, det vil si å kunne beskrive, forklare og begrunne løsningene. Å reflektere over balansen mellom praksis og logos, det vil si metoder og forståelse, er et utgangspunkt for å karakterisere undervisning. For å utvikle elevers begrepsforståelse trenger de å møte en undervisning som har fokus på argumentasjon, begrunnelse og bevis. Undervisning som for en stor del handler om å løse typeoppgaver med spesifikke og velkjente teknikker er en undervisning der metoder har stor vekt. En strategi som elever kan utvikle når de møter begreper som er vanskelige å lære, er å fokusere på bruke noen teknikker uten å tenke over hvordan og hvorfor disse teknikkene fungerer. Det kan for eksempel handle om begrepet derivasjon, der elever kan velge å fokusere på derivasjonsregler uten å bry seg om hvorfor reglene ser ut som de gjør. Når undervisningen inkluderer resonnement og utledninger som viser hvorfor teknikken fungerer, vil elevene bedre kunne tilegne seg kunnskap og forståelse, og kunne begrunne sine metoder.

Når det gjelder undervisning av terskelbegrep vet vi at elevene kommer til å møte vanskeligheter og at elevene trenger mye støtte for å komme gjennom overgangsfasen. Når undervisningen også fokuserer på logosdelen får elevene mulighet til å bearbeide hvordan og hvorfor teknikkene fungerer. For å utvikle gode kunnskaper om et begrep trengs alltid innslag av logos. For terskelbegrep, der disse kunnskapene er ekstra vanskelige å ta til seg, er balansen mellom metoder og forståelse enda viktigere. For terskelbegrepet derivert gjelder det, som beskrevet ovenfor, at elever trenger å kunne oppfatte den deriverte både som et lokalt og et globalt objekt. For å nå dit er det ikke nok å kunne bruke derivasjonsreglene korrekt. Elevene trenger også å utvikle kunnskaper om hvordan og hvorfor derivasjonsreglene fungerer. Dette betyr ikke at metodekunnskap er uvesentlig. Det

[5] G. Brousseau, 1997; 2002 s 47 – 54 ; Y. Chevallard, 1992.

er viktig at elever utvikler effektive og brukbare teknikker, men det er ikke nok. For å passere terskelen kreves det at elevene også får utfordringer som kan gi innsikt og forståelse.

Oppsummering

Det er en viktig del av matematikkundervisningen å gi elevene mulighet til å utvikle en god begrepsforståelse. For visse begrep innebærer dette en ekstra utfordring. Terskelbegrep er begrep som elever kan oppfatte som vanskelige å lære, men når elever har tilegnet seg kunnskaper om disse begrepene, får de nye muligheter til å lære mer matematikk. Tidligere fragmentariske kunnskaper innenfor et matematisk område kan integreres, og elevenes syn på hele området kan transformeres. Men utviklingen av elevenes begrepsforståelse tar tid. For å passere overgangsfasen (liminal space) trenger elevene mye støtte. Både praksis og logos må utvikles. Det vil si at elevene trenger ferdigheter i å løse typeoppgaver, men også kunnskaper om hvordan og hvorfor teknikkene fungerer. Forskning viser at det er viktig hvordan elevene møter terskelbegrepene, og at fokus på terskelbegrep kan gi gode resultater.

Referanser

Brousseau G. (2002) *Theory of Didactical Situations in Mathematics, Didactique des Mathématiques, 1970 – 1990.* Edited and translated by Balachleff, N., Cooper, M, Sutherland, R. & Warfield, V. Kluwer Academic Publisher

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. In *R. Douady & A. Mercier (Eds.) Research in didactique of mathematics. Selectid papers (pp. 131 – 167).* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative.* Doctoral thesis, University of Jyväskylä.

Juter, K. (2009). Studenter lär sig gränsvärden. I G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby & H. Wallin (red.), *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola,* (s. 74-91). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) & Svensk förening för matematikdidaktisk forskning.

Meyer, J.H.F., & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education, 49*, 373–388.

Pettersson, K., Stadler, E., & Tambour, T. (2013). Transformation of students' discourse on the threshold concept of function. I B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (red.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2406-2415). Ankara: Middle East Technical University.

Skolverket (2015). Om ämnet matematik.
www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv
Nedladdat 2015-06-17.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press.