REALFAGSLØYPER

Matematisk problemløsing

NATURFAGSENTERET
NASJONALT SENTER FOR NATURFAG I OPPLÆRINGA

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Ingvill Merete Stedøy
MATEMATIKKSENTERET, NTNU

SEPTEMBER, 2018

Innholdsfortegnelse

Hvorfor problemløsing?

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

Paul Halmos

Utdanningsdirektoratet startet en prosess med fagfornyelse som resulterte i en beskrivelse av *Kjerneelementer for fag* i 2018. I matematikk er kjerneelementene

- Utforsking og problemløsing
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kjerneområder

Når vi skal arbeide med problemløsing, må vi bruke kompetanser innenfor alle de andre kjerneelementene. Derfor er problemløsing svært sentralt for å lære matematikk. Det første kjerneelementet beskrives slik:

> **Utforsking og problemløsing -** Utforsking handler om at elevene leter etter mønstre og finner sammenhenger. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. Problemløsing handler om at elevene utvikler en løsningsmetode på et problem de ikke kjenner fra før. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategier og fremgangsmåter og innebærer å kunne bryte ned et problem i delproblem som kan løses systematisk.

Forskere fremhever også betydningen av problemløsing for elevenes læring og forståelse i matematikk:
Problemløsing bør være arenaen der alle tråder av matematisk kunnskap konvergerer. Det bør gi muligheter for elevene til å veve sammen kunnskapstrådene og for lærere til å vurdere elevenes arbeid (performance) med alle trådene (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Siden arbeid med problemløsing gir elevene muligheter til å utvikle seg innenfor alle kjerneelementene får læreren mulighet til å vurdere elevenes kompetanse og få innsikt i hvordan de resonnerer.

Arbeid med problemløsing er tidkrevende, men det er det verdt. Hvis vi fokuserer på å undervise prosedyrer i aritmetikk i stedet for å utvikle innsikt, kommer vi til å vektlegge individuelle øvinger. Presset læreren føler på «å komme gjennom boka» fører til at læreren setter av for lite tid til samtale og diskusjon. Men det er nettopp disse samtalene og diskusjonene – og ikke mengden av løste oppgaver – som sikrer dybdelæringen hos elevene (van Galen et al., 2008). Når læreren prioriterer tid til å arbeide med problemløsingsaktiviteter, bidrar dette til økt forståelse og dybdelæring hos elevene.

Problem og problemløsing

I faglitteraturen møter vi ulike definisjoner av problem. I denne artikkelen definerer vi et problem som «en oppgave der eleven ikke umiddelbart ser hvordan han kan komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes» (Johnson, Herr & Kysh, 2003; Leer, 2009).

Kongelf (2011) peker på at land som gjør det godt i matematikk har et sterkt fokus på problemløsing. Rammeverket for læreplanen i Singapore betrakter problemløsing som kjernen i matematikkundervisningen, og lærebøkene i Singapore vier hele kapitler på problemløsing med fokus på heuristikk - spesifikke strategier for problemløsing. I norske lærebøker har det til nå vært få problemløsingsoppgaver, og mangel på beskrivelse av generelle strategier for problemløsing.

Elevene bør lære problemløsing, og opplæringen bør starte allerede i de tidligste skoleårene. Det er en krevende oppgave for læreren som setter seg ambisiøse mål både for sin egen undervisning og elevenes læring. Pennant (2013) peker på åtte aspekter ved undervisningen som læreren bør reflektere over. Disse aspektene er sentrale for å lykkes med undervisning i problemløsing.

1	Hvem snakker mest i den delen av timen hele klassen er samlet?	Som en tommelfingerregel er et sterkt miljø for problemløsing kjennetegnet ved at læreren står for 30 % og elevene for 70 % av praten. Hvordan er denne balansen i ditt klasserom? Hva sier du når du har ordet? Forklarer hvordan noe skal gjøres? Stiller spørsmål?
2	Hvilken type spørsmål stiller jeg?	Stiller jeg lukkede spørsmål som «kan du se hvordan systemet fungerer?» eller åpne spørsmål som «hvilke system finner vi i dette problemet?»
3	Hvem svarer på spørsmålene?	Er det for det meste de samme elevene? Er det de som er ivrigst og mest taleføre? Er det oftere gutter enn jenter?
4	Hvor godt hører jeg etter på elevenes svar og prøver å forstå hva de sier?	Responderer jeg ved å fortelle hele klassen hva jeg tror en elev sier uten å sjekke med eleven om det stemmer? Omformulerer jeg litt på det de sier for at det skal være mer forståelig eller passe bedre til et «bedre/riktig» svar»? Stiller jeg eleven «oppklarende» spørsmål som «så du sier at …» eller «… er det det du mener»?
5	Hva gjør jeg med elevenes svar?	Roser jeg dem for fantastiske svar? Vurderer jeg ganske enkelt svarene deres med kommentarer som «Bra», «Godt gjort», «Riktig», «OK», «Nei», «Tenk om igjen»? Fortsetter jeg på det neste jeg hadde tenkt å si? Ber jeg andre elever

		kommentere det som blir sagt? Følger jeg opp med spørsmål som «er du sikker» eller hvordan vet du det»?
6	Hvordan legger jeg til rette for læring?	Forklarer jeg nøyaktig hva elevene må gjøre og forsikrer meg om at de forstår det så godt som mulig før de setter i gang med arbeidet? Peker jeg på kritiske punkter, gir hint eller ledetråder for å hjelpe dem? Utnytter jeg elevenes tanker og ideer som utgangspunkt for å lede elevenes oppmerksomhet mot målet for timen?
7	Hvor trygge er elevene på å ta sjanser, prøve ut ideer og å gjøre feil?	Hvilke tegn finner du på at elevene våger å bidra med sine tanker i diskusjonen eller ideer de prøver ut? Hvilke kjennetegn ser jeg på at elevene prøver ut egne tanker snarere enn å gjenkalle mine tanker? Når er det nyttig for dem å gjenkalle mine tenker? Hva gjør jeg når elevene gjør feil eller kommer inn i ei blindgate?
8	Hva kommuniserer kroppsspråket mitt?	Kommuniserer jeg interesse/aksept/frustrasjon/uenighet …? Hvordan endrer kroppsspråket mitt seg i løpet av timen?

Undervise i problemløsing

Elevene bør samarbeide om å løse problemløsingsoppgaver, både fordi man kan lære av å lytte til andres ideer og av å formidle egne ideer til andre (Johnson et al., 2003) (NCTM, 2014). I artikkelen «Undervisning – planlegging, prosess og produkt»[1] beskrives en struktur for en undervisningsøkt som passer godt til arbeid med problemløsing. Gruppearbeid spiller en sentral rolle i denne formen for undervisning.

Undervisning i problemløsing krever at elevene får en utfordring de ikke umiddelbart ser hvordan de kan løse. Elevene må derfor få tid til å tenke og å «leke» med problemet. De må prøve ut ideer som kanskje ender i en blindvei og justere retningen ut fra erfaringene de gjorde, diskutere erfaringene med andre og være villige til å ta risiko. Læreren kan støtte elevenes læring ved å utvikle en klassekultur som vektlegger innsats og strev, og der feil er en naturlig del av læringsprosessen (Pennant, 2013).

Elever som får eksplisitt undervisning i sentrale matematiske problemløsingsstrategier blir bedre problemløsere enn elevene som får tradisjonell undervisning. I den tradisjonelle undervisningen er fokus på selve aktiviteten eller oppgaven elevene skal arbeide med. Strategien – måten å angripe problemet på – blir ikke gjenstand for spesiell oppmerksomhet. Læreren gjør ikke elevene oppmerksomme på hva som kjennetegner strategien og når den

[1] Artikkel utarbeidet til MAM-prosjektet, Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling-i-skolen/mam/om-mam-prosjektet

kan være nyttig. I den eksplisitte undervisningen i problemløsing er målet for timen knyttet til strategien (Amit & Portnov-Naaman, 2017). Det setter krav til valg av problem læreren skal presentere. Problemet må være slik at den aktuelle strategien blir et naturlig valg – i alle fall for noen av elevene (Johnson et al., 2003). Problemet bør også være slik at elevene med litt anstrengelse kan trenge inn i de matematiske utfordringene problemet rommer. Når nye problemløsingsstrategier blir introdusert vil det være naturlig å ha både et prosessmål og et faglig matematisk mål for timen. Jo Boaler (2017) anbefaler å la elevene arbeide med problemet før metoden elevene bruker blir gjenstand for drøfting.

Denne artikkelen gir i fortsettelsen eksempel på problem som naturlig inviterer til en eller flere av problemløsingsstrategiene nedenfor. I oppsummeringen under kan læreren styre klassediskusjonen mot den eller de strategiene som viser seg å være mest effektive for problemet, eller som læreren har som et prosessmål for økten. Det er like viktig å løfte fram prosessmålet som det matematikkfaglige målet for timen, slik at begge deler blir tydelig for elevene. Vi presenterer forslag til løsninger på problemene som kommer, men det kan hende elevene finner andre metoder. La alle få komme med idéer, og ta elevenes innspill på alvor.

Problemløsingsstrategier:

- Lage en visualisering
- Prøve seg fram, intelligent gjetting
- Sette opp en systematisk tabell
- Tegne en graf, med eller uten hjelpemidler
- Sette opp en likning
- Prøve noen enklere tilfeller
- Lete etter mønster
- Tenke baklengs

Uansett hvilke av strategiene elevene velger, vil de ha nytte av følgende:

- Sette opp en hypotese
- Tenke gjennom hva slags matematikk problemet handler om
- Tenke gjennom om en har sett et liknende problem eller samme matematikk i en annen kontekst
- Lage en plan for løsning
- Være villig til å se problemet på en ny måte og begynne på nytt
- Vurdere om løsningen gir mening

Eksemplene vil vise at det kan være naturlig å velge flere av strategiene ovenfor, selv om læreren har en bestemt strategi i tankene når prosessmålet velges. Eksemplene er hentet fra forfatternes egen erfaring i undervisningen, eller fra forskningslitteratur.

Når elevene har arbeidet med problemløsing, kan det være veldig nyttig for dem å reflektere og gjøre en egenvurdering av arbeidsprosessen. Elevene kan skrive en slags journal der de svarer på:

- Hva gjorde du for å løse problemet?
- Fungerer metoden din alltid?
- Kan du tenke deg et annet problem der denne metoden kan brukes?
- Hva slags matematikk fikk du bruk for når du skulle løse problemet? Kan du finne andre metoder å løse problemet på?

Lage en visualisering

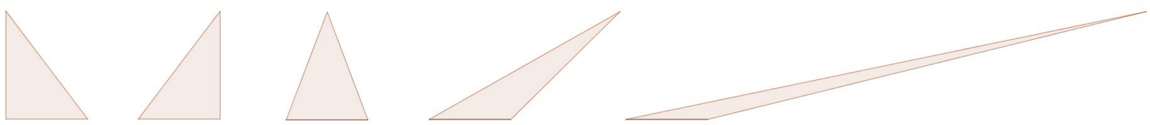
Visualiseringen kan ta form av en tegning eller et diagram. I denne sammenheng kan vi føye til bruk av konkreter, selv om visualisering og konkreter (fysiske gjenstander) ofte kategoriseres som to ulike representasjoner (NCTM, 2014). Visualiseringen bidrar til å se sammenhenger som virker kompliserte når de presenteres som en tekst. Teksten tolkes gjennom en visualisering, og visualiseringen gir støtte til å uttrykke sammenhengene i et mer formelt matematisk språk.

To trekanter like lang grunnlinje og like stor høyde. Har de samme areal og omkrets?

Elevene startet med å tegne noen trekanter. De kom fort opp i diskusjoner om hvordan trekantene kunne se ut. Kunne de være rettvinklede? Likebeinte? Likesidete? Hva som helst?

$Areal = \frac{grunnlinje \cdot høyde}{2}$, så hvis grunnlinja og høyden er lik, så er arealet likt.

Figurene så omtrent sånn ut:



Omkretsen kan bli veldig stor hvis vi flytter det ene punktet langt bort!

Svaret må være at omkretsen kan bli så stor vi bare vil!

Prøve seg fram, intelligent gjetting

Ofte kan det være vanskelig for elevene å vite hvordan et problem skal angripes. En løsning kan da være å «bare prøve noe» og se hvordan det går. Om forsøket «mislykkes» prøver man på nytt. Men forsøkene bør ikke være tilfeldige. En systematisk utprøving av muligheter vil lede fram til en eller flere løsninger på problemet.

Summen av fire etterfølgende partall er 124. Bestem de fire tallene. (fra matematikk.org)

Løsningsforslag/Metoder:

- **Finne gjennomsnittet av de fire tallene, og så finne hver av dem.**

Noen elever tenker at hvis det hadde vært fire like tall, ville tallene være 124:4=31
Da må tallene vi leter etter, ligge på hver side av 31. To av dem kan være 30 og 32, for det er partall. På hver side av dem kommer 28 og 34. Hvis en prøver disse fire tallene, blir det:

28 + 30 + 32 + 34 = 124

Det passer!

- **Bare begynne et sted, og så justere**

Noen elever begynner et tilfeldig sted, men ikke altfor små tall. Kanskje 20 + 22 + 24 + 26? Det blir 92, som er for lite. Det kan ikke være dobbelt så stort, men kanskje 30 + 32 + 34 + 36? Det blir 132. Det er 8 for mye. 36 – 8 = 28.

Da passer det med 28 + 30 + 32 + 34 = 124

- **Sette opp en likning**

Noen ganger er det de elevene som tradisjonelt liker matematikk som bruker mer avanserte metoder, selv om det ikke er nødvendig. Fordelen med det, er at disse metodene ofte er mer generelle. Elevene kan selv velge om de vil la det minste tallet være x, eller et av de andre tallene.
Hvis det minste tallet er x, blir de andre tre tallene x + 2, x + 4 og x + 6.
Likningen blir: x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 124
Da er 4 x = 124 – 2 – 4 – 6 =112
x = 28, tallene blir 28, 30, 32, 34. En rask sjekk viser at det stemmer 28 + 30 + 32 + 34 = 124

Noen elever tenker at det skal være partall. Hvis det minste tallet er 2n, blir de andre 2n + 2, 2n + 4 og 2n + 6. En likning med disse tallene gir n = 14, og svaret blir 28, 30, 32 og 34.

Etterpå kan elevene diskutere hvilke metoder som lar seg generalisere. Hva hvis det er flere enn fire tall for eksempel? Kan hvilke som helst tall være summen av fire etterfølgende partall? Hvilke egenskaper må summen ha?

Elevene ser fort at det må være partall. Videre ser de at det må være delelig med 4. Men likningene viser at det faktisk må være delelig med 8.
Nå kan elevene utfordres til å lage oppgaver til hverandre.

Sette opp en systematisk tabell

En enda mer systematisk måte å prøve seg fram på, er å sette opp en tabell. Tabellen vil gi en oversikt over problemet, enten det er å finne bestemte kombinasjoner, eller målet er å finne et mønster.

Matematikklæreren har tre døtre. Elevene vil vite hvor gamle de er. Matematikklæreren ville selvsagt benytte sjansen til å gi elevene et problem. Han sa: Produktet av alderne til døtrene mine er 72. Summen av aldrene er det samme som husnummeret vårt, og det vet dere hva er.

Elevene gikk i gang med å løse problemet, men etter mye jobbing sa de til læreren at de hadde for få opplysninger til å løse problemet. Da sa læreren: Men den eldste av døtrene mine er veldig glad i is!

Da klarte elevene å løse problemet. Kan dere løse det?

(Botten, 2011)

<u>Metode:</u>
Det ser i første omgang ut til å være altfor få opplysninger, for elevene vet jo heller ikke husnummeret. Hvorfor klarer de å løse problemet når de vet at den eldste liker is? Hva vet vi i det hele tatt? Hva ville vi gjort hvis vi visste husnummeret?

Da ville vi sett hvilke tre tall multiplisert sammen gir produkt 72, og hvilke av disse tallene har en sum som er lik husnummeret. Det kan være lurt å primtallsfaktorisere 72 for å se hvilke kombinasjoner av tre tall som kan brukes.

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Det kan være lurt å sette opp en systematisk tabell med produktet av tre tall som blir 72, og finne summen av dem. Vi må huske på at 1 kan være en faktor, så vi kan starte med alle muligheter med tallet 1. Vi utelukker 1, 1 og 72, for det går ikke med 3 søstre. Heller ikke 1, 2 og 36.

Tall 1	Tall 2	Tall 3	Sum
1	4	18	23
1	8	9	18
1	6	12	19
1	3	24	28
2	2	18	22
2	4	9	15
2	3	12	17
2	6	6	14
3	3	8	14
3	4	6	13

Da står vi igjen med 10 muligheter. Men hvis elevene visste hvilket husnummer læreren hadde, så var det jo bare å plukke ut det tallet! Hvis ikke det var flere ulike muligheter med samme sum da!

Fra tabellen går det fram at 2, 6, 6 og 3, 3, 8 begge gir sum 14. Da må læreren bo i nr. 14. Da ser elevene at det hjelper å vite at en av jentene er eldst. I begge tilfellene er det et par tvillinger, men med 2, 6, 6 er det to jenter som er eldst.

Det betyr at jentene til læreren må være 3 år, 3 år og 8 år.

Tegne en graf

Hvis problemet lar seg uttrykke som en funksjon med en variabel, eventuelt også med en parameter, kan det være nyttig å tegne en graf, og bruke grafen til å løse problemet. I eksempelet nedenfor, kunne det vært gjort mer avansert og mer generelt ved å la omkretsen være en parameter. Det kan være nyttig å la elevene utfordres med kjent omkrets i første omgang. Så kan de eventuelt diskutere om metoden kan brukes for alle omkretser, og om resultatene blir de samme.

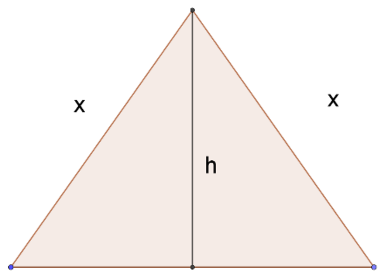
> *En likebeint trekant har omkrets 36. Hva er det største arealet trekanten kan ha? Hvordan ser trekanten ut da? Kan trekanten være rettvinklet?*

<u>Løsningsforslag/metoder:</u>

Elevene prøver å finne en måte å løse oppgaven på. De har løst liknende oppgaver med rektangler. Da ble svaret at arealet er størst når rektangelet er et kvadrat. Kanskje arealet blir størst når trekanten er likesidet? Da er i tilfelle alle sidene lik 12, og arealet er:

$$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12\cdot \sin(60°) = 6\cdot 12\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \approx 62{,}35$$

Men kan vi være sikre?
Kanskje vi kan tegne en graf som viser arealet som funksjon av ▯, der ▯ er lengden til de like sidene?
Så kan vi lese av toppunktet til grafen.



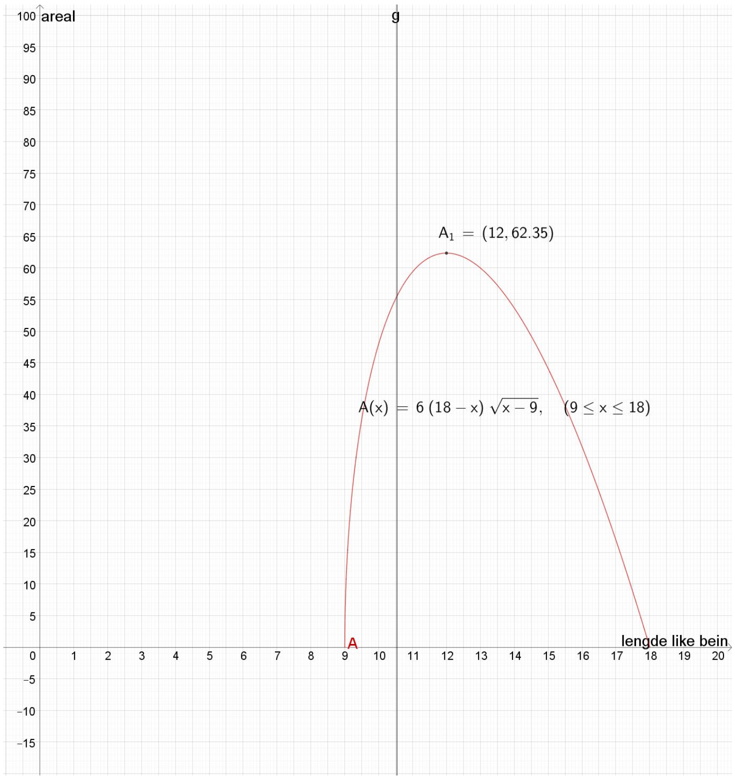
For å kunne tegne en graf, må vi ha et funksjonsuttrykk.

Hvis de like sidene er ▯, så er grunnlinja $(36-2x)$.
Så må $9 < x < 18$ for at det skal være en trekant.
Da kan vi bruke Pytagoras setning til å finne høyden:

$$h = \sqrt{x^2-(18-x)^2} = \sqrt{36x-324} = 6\sqrt{x-9}$$

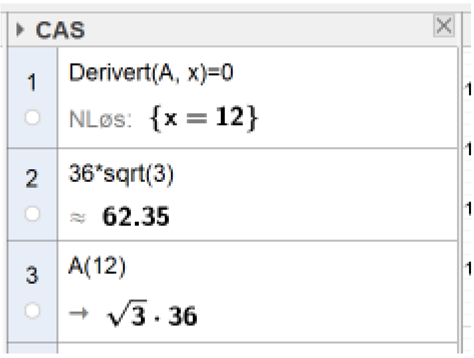
Arealet er gitt ved funksjonen: $A(x) = \frac{1}{2}(36-2x)\cdot 6\sqrt{x-9} = 6(18-x)\sqrt{x-9}$

Tegner vi grafen til $A(x)$ i GeoGebra, kan vi lese av toppunktet.
Alternativt kan vi bruke CAS til å løs $A'(x) = 0$. Begge deler gir ▯ $= 12$ som løsning.
Vi ser at $A(12) = 6(18-12)\sqrt{12-9} = 36\sqrt{3} \approx 62{,}35$.



<u>Trekanten har største areal når x= 12. Da er trekanten likesidet.</u>

Vi ser det også hvis vi deriverer med CAS:

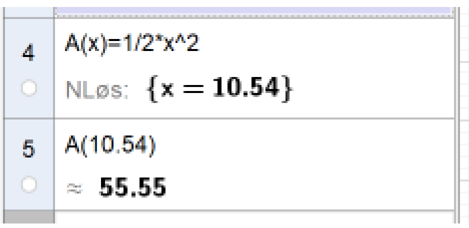


Kan trekanten være rettvinklet?

Da må den rette vinkelen være mellom de to like beina, slik at arealet er $\frac{1}{2}x^2$.

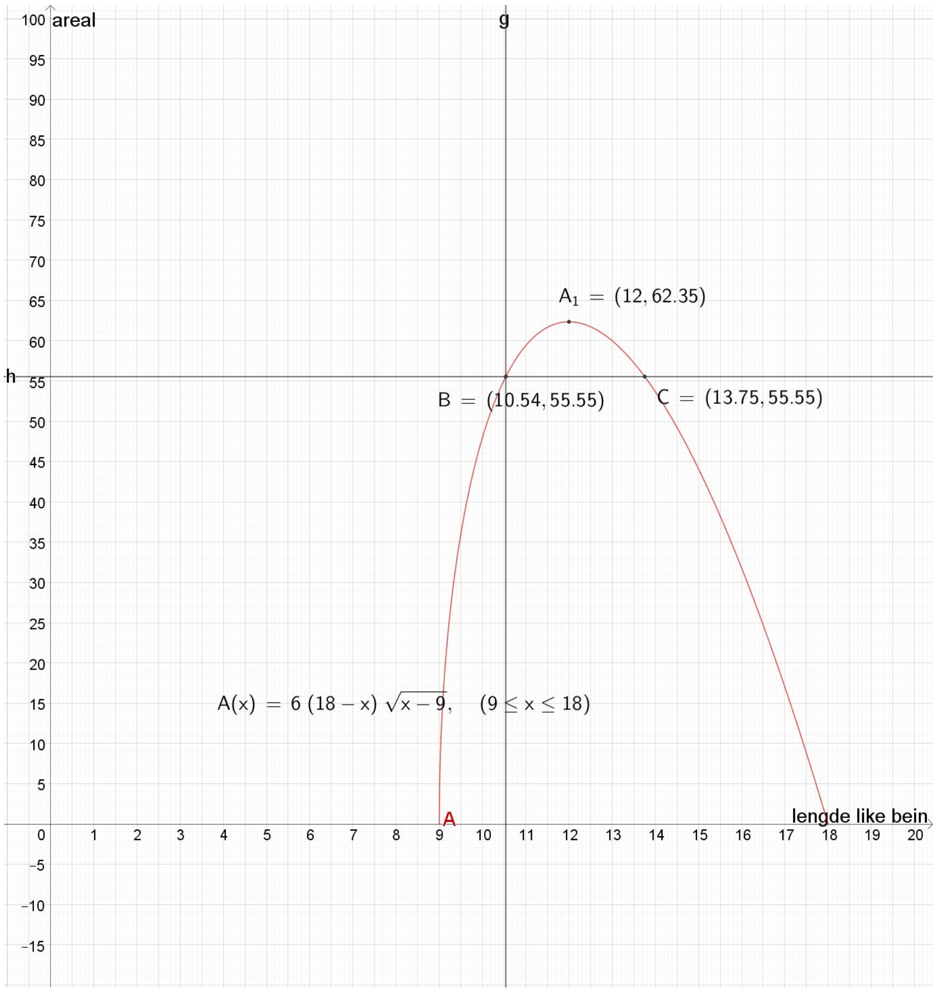
Løser vi $A(x) = \frac{1}{2}x^2$ i CAS, får vi $x = 10{,}54$.

$$A(10{,}54) = 55{,}55$$



<u>Når trekanten er rettvinklet, er arealet 55,55. Dette arealet har trekanten også når sidene er 13,75.</u>

Dette kan også løses på grafen etter at vi har funnet $x = 10{,}54$. Vi tegner linja $x = 10{,}34$, finner skjæringspunktet mellom den linja og grafen til A. y-verdien i punktet er arealet til trekanten når den er rettvinklet. Da ser vi at det finnes en annen x-verdi som gir det samme arealet, men da kan ikke trekanten være rettvinklet. Da er $x = 13{,}75$.



Noen elever velger grunnlinja lik x. Da blir de like sidene lik $\frac{36-x}{2}$.

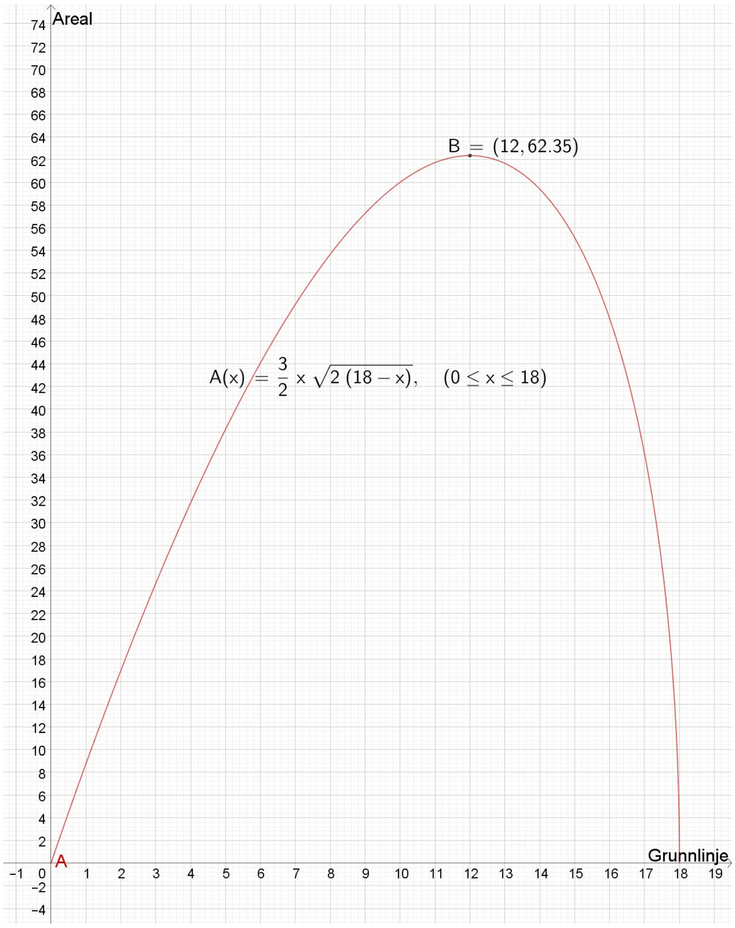
Høyden blir: $h = \sqrt{\left(\frac{36-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2(18-x)}$

Arealfunksjonen er da: $A(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{2(18-x)}$

Da må $0 < x < 18$ for at det skal bli en trekant.

Elevene tegner grafen til A i GeoGebra og leser av toppunktet.

<u>Arealet er størst når $x = 12$. Da er trekanten likesidet, og arealet er $A(12) = 36\sqrt{3} \approx 62{,}35$</u>



De fant det samme ved derivasjon:

1 Derivert(A, x)=0
NLøs: $\{x = 12\}$

11 A(12)
→ $\sqrt{3} \cdot 36$

Betingelsen for at trekanten skal være rettvinklet er at de to like sidene står normalt på hverandre. Da er arealet av trekanten $A(x) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{36-x}{2})^2$.

Siden vi har et annet uttrykk for arealet også, kan likningen løse den med CAS. Deretter finner vi arealet ved å lese av arealet for løsningsverdien av x, eller regne ut $A(x)$ for denne x-verdien.

2 A(x)=1/2*((36-x)/2)^2
NLøs: $\{x = 14.91\}$

3 (36-14.91)/2
≈ 10.55

5 A(14.91)
≈ 55.6

I linje 3 ser elevene at grunnlinja er 10,55, som de som løste oppgaven ved å sette grunnlinja lik x, fikk.

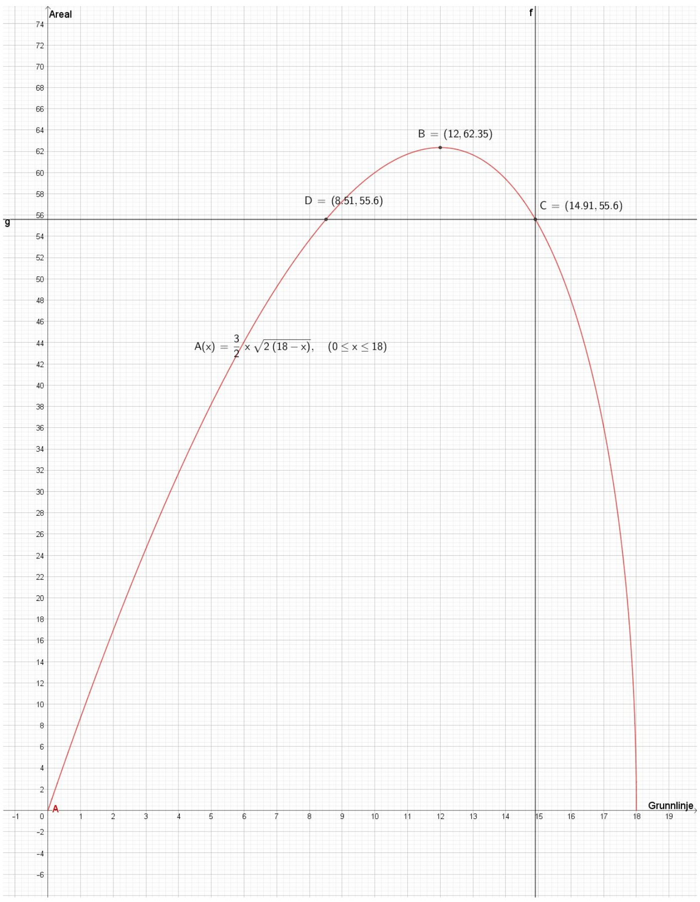
Men vi kan også tenke at når trekanten er rettvinklet, så må høyden være lik halve grunnlinja, og løse likningen x

$$h = 3\sqrt{2(18-x)} = \frac{x}{2}$$

7	3*sqrt(36-2x)=x/2
	NLøs: $\{x = 14.91\}$

I begge tilfeller viser CAS at $x = 14{,}91$. $A(14{,}91) = 55{,}6$.
Når elevene løser dette på grafen, ser de at det blir to løsninger. Grunnlinje lik 8,51 og de like sidene 13,75.

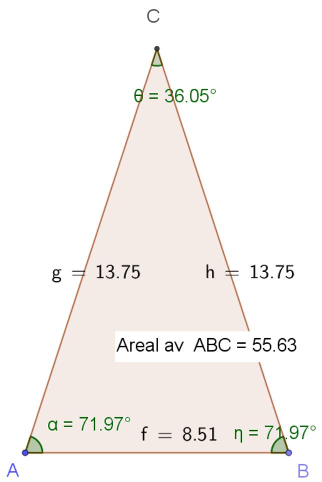
8	(36-8.51)/2
	$\approx$ 13.75

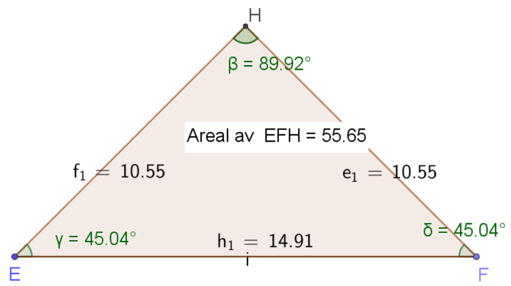


Nå blir elevene nysgjerrige på å finne ut hvordan trekanten ser ut i det andre tilfellet, og går i gang med å beregne vinklene ved grunnlinja. De tenker å finne lengden på de like sidene når x=8,51, som er den andre x-verdien der arealet er 55,6 som i den rettvinklede trekanten, og halve grunnlinja og bruke invers cosinus til å bestemme vinkelen.

8	(36-8.51)/2 ≈ 13.75
9	arccos(8.51/(2*13.75)) ≈ 1.26
10	1.26/pi*180 ≈ 72.19

Vinklene ved grunnlinja er omtrent *72°*. Elevene tegnet trekantene i GeoGebra.
Nå fikk de noe nytt å tenke på. Er det alltid sånn at en gylden trekant og en rettvinklet trekant med samme omkrets har samme areal?





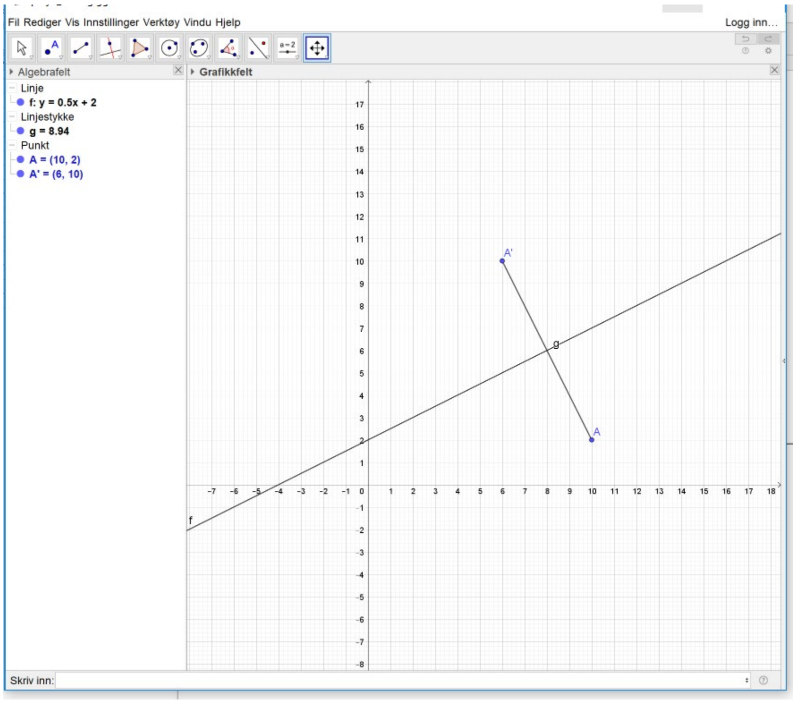
Sette opp likning

Polya: *Gitt et punkt utenfor en bestemt rett linje. Bestemt punktet som er symmetrisk med det gitte punktet, med linja som symmetrilinje.* (Pólya, 1957)

Løsningsforslag/Metode:

Elevene kan velge et eksempel å prøve først. Det er spennende om elevene velger linje og punkt, så blir det forskjellig for de ulike gruppene.

Hvis de gjør det i GeoGebra, blir algebrafeltet en fasit. Her er et eksempel:



La linja være $l: y = \frac{1}{2}x + 2$, og punktet $A(10,2)$ utenfor linja.

Speilingspunktet $A'(a, b)$ må oppfylle to krav:

1. Linjestykket AA' står normalt på linja l
2. Midtpunktet på linjestykket AA' ligger på l.

For å sette opp en likning som passer med krav 1, bruker elevene at vektoren fra A til A' skalarmultiplisert med en retningsvektor langs l er 0.

Det gir: $[a - 10, b - 2] \cdot [2,1] = 0$, og videre

$$2a - 20 + b - 2 = 0$$

$$b = 22 - 2a$$

Krav 2 gir at midtpunktet $(\frac{a+10}{2}, \frac{b+2}{2})$ må passe inn i likningen for linja l.

$$\frac{b+2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+10}{2} + 2$$

$$b + 2 = \frac{1}{2}a + 9$$

Når setter inn for b fra den første likningen, får vi $22 - 2a + 2 = \frac{1}{2}a + 9$

Som gir $a = 6$ og $b = 10$. Løsningen er altså punktet $A´ = (6{,}10)$ som stemmer med GeoGebra-fasiten.

Nå kan elevene generalisere og sortere ut hva som er kjent og hva som er de ukjente størrelsene.

Vi kjenner linja $y = px + q$. Den har en retningsvektor $[1, p]$

Så er ett punkt som ikke ligger på linja oppgitt. Det kaller vi $A(c, d)$.

Det ukjente punktet er $A´(a, b)$.

Vi lar de ukjente størrelsene være rød. Da må vi løse to likninger med to ukjente. Midtpunktet på AA´ er $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Vektoren fra A til A´ er $[a - c, b - d]$.

Likningene blir:

1. $1 \cdot (a - c) + p(b - d) = 0$
2. $\frac{b+d}{2} = p \cdot \frac{a+c}{2} + q$

Disse likningene kan løses i hvert tilfelle, og gir løsningen på problemet.

Prøve noen enklere tilfeller og lete etter mønster

Noen problem kan være så omfattende at det ser uoverkommelig ut å starte på det. Da kan strategien forenkle problemet være til hjelp. Man løser en enklere utgave av samme problem og ser om det er et mønster som kan hjelpe oss videre.

Problemet med de 1000 skap (lockers) er en av de mest brukte problemene i amerikanske skoler. Jeg prøvde det i 8. klasse og i 1T. Til å begynne med virker det umulig å få oversikt over, men her hjelper det å se på enklere tilfeller.

Problemet med de 1000 skap: *På en skole var det 1000 elevskap og 1000 elever. En dag bestemte elevrådet at de skulle gjøre et eksperiment. Elevene ble nummerert fra 1 til 1000, og skapene hadde nummer fra 1 til 1000. Da elevene kom til skolen var alle elevskapene lukket. Elevene skulle gjennomføre følgende prosedyre:* *Elev nummer 1 skulle åpne alle skapene.* *Elev nummer 2 skulle starte på skap nummer 2, og gå til annen hvert skap. Disse skulle han lukke* *Elev nummer 3 skulle starte på skap nummer 3, gå til tredje hvert skap. Lukke de som var åpne, og åpne de som var lukket.* *Slik fortsatte elev nummer 4 med hvert fjerde skap, og så videre, helt til alle 1000 elevene hadde gjort sin jobb.* *Hvilke skap var åpne og hvilke var lukket når alle de 1000 elevene var ferdig?* *Hvorfor blir det sånn?*

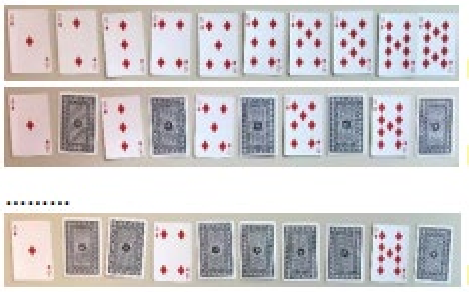
<u>Løsningsforslag/metode:</u>

Klassen samarbeidet. Elevene ble nummerert fra 1 til 28. Vi tegnet 28 skap på tavla, elevene stilte seg i kø etter nummer, og gikk i tur og orden opp og skrev Å og L etter hvert som skap ble åpnet og lukket.

Etter hvert begynte elevene å gjette:

- Er det primtallene?
- Når nummer 5 starter, så skjer det ikke mer med de 4 første skapene! Da er i alle fall nummer 1 og nummer 4 åpne!
- Nå ser vi at all primtallene kommer til å forbli lukket, for dit kommer bare nummer 1 og den eleven med primtallsnummer!
- 1, 4 og 9 er åpne!

Med kort kan det illustreres slik:



- Kanskje det er kvadrattallene? Vi må fortsette til nummer 16! Ja!!
- Men hvorfor er det sånn? Hvordan kan vi finne ut hvilke elever som kommer innom de ulike numrene?

Elevene satt i grupper og prøvde å finne en forklaring å problemet. De satt opp en tabell og markerte hvilke elever som hadde vært innom skapene:

1 1	2 1,2	3 1,3	4 1,2,4	5 1,5	6 1,2,3,6	7 1,7	8 1,2, 4,8	9 1,3,9	10 1,2, 5,10
11 1,11	12 1,2, 3,4, 6,12	13 1,13	14 1,2, 7,14	15 1,3, 5,15	16 1,2, 4,8, 16	17 1,17	18 1,2, 3,6, 9,18	19 1,19	20 1,2, 4,5, 10,20
21 1,3, 7,21	22 1,2, 11,22	23 1,23	24 1,2, 3,4, 6,8 12,24	25 1,5, 25	26 1,2 13,26	27 1,3 9,27	28 1,2, 4,7, 14,28		

Ny innsikt oppsto:
- Elevnummeret er faktorene til tallet!
- Men hvor mange faktorer må det være for at skapene skal ende opp som åpne eller lukket?
- Et partalls antall elever innom, det vil si faktorer, eller et odde antall faktorer.
- Men hvorfor er kvadrattallene de eneste tallene som har et odde antall faktorer?

Hvis tallet har en faktor, for eksempel 18, som har 3 som faktor, så må 18:3=6 også være en faktor. Så faktorene kommet i par! For tallet 18, så er parene 1 – 18, 2 – 9 og 3 – 6.

Hvis tallet er n, og d er en faktor, så er $\frac{n}{d}$ en annen faktor, hvis ikke $\frac{n}{d} = d$.

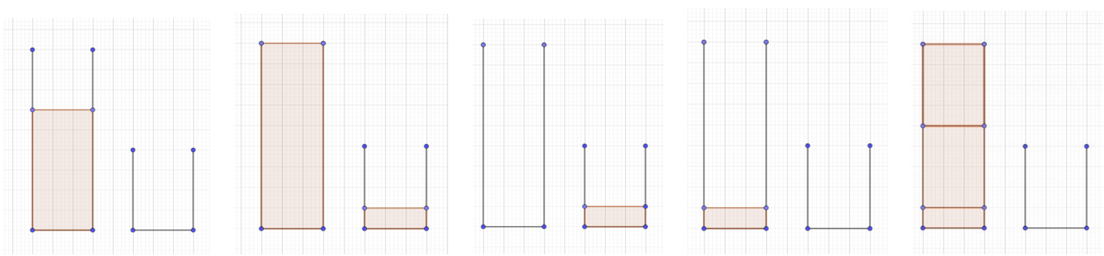
Men kan det hende? Ja, det skjer hvis $n = d^2$! Det gjelder for kvadrattallene. For kvadrattallet 16 for eksempel, så er parene 1 – 16, 2 – 8 og 4 – 4. Men 4 teller bare én gang, så 16 har 5 faktorer. Kvadratroten av tallet en slags dobbel faktor, så den teller bare én gang, men alle de andre kommer i par. Da var problemet løst og forstått.

Tenke baklengs

Mange problem er slik at man kan arbeide seg fram gjennom informasjonen som gis fra begynnelse til slutt i oppgaven. I noen problem vil utgangspunktet være ukjent. Da må man skifte fokus, starte med informasjonen som er kjent, og den står kanskje i slutten av teksten. Eller man kan rett og slett tenke at problemet er løst, og nøste seg tilbake til start, for til slutt å gå fra start til slutt, som i Polyaproblemet nedenfor.

> Polya:
> *Hvordan kan du hente nøyaktig 6 L vann fra elva, når du har to bøtter uten merker på, og vet at den ene rommer 9 L og den andre rommer 4 L?*

Løsningsforslag/Metode:
Start med å tenke at problemet er løst. Det vil si at du har 6L vann i den største bøtta, og den minste er tom, som på bilde 1.



Bilde 1 Bilde 2 Bilde 3 Bilde 4 Bilde 5

Hva kan ha vært situasjonen rett før dette? Da kan den største ha vært full, og den minste inneholdt 1L. Dette kan være et vanskelig steg.
Før det igjen kan den største ha vært tom. Før det igjen kan den minste ha vært tom.

Men hvordan kan situasjonen i bilde 4 ha oppstått? Da mangler det 8 L fra den var full. Men de 8L kunne man ha kvittet seg med ved å ha fylt den minste full og tømt ut, to ganger.

Løsningen kan vi se nå:
- Vi fyller den største full.
- Heller 4 L over i den minste, og tømmer ut. Da er det 5 L igjen i den store.
- Heller 4 L over i den minste, og tømmer ut. Da er det 1 L igjen i den store.
- Heller 1 L over i den lille. Da er den store tom.
- Fyller den store helt full. Da er det 9 L i den store og 1 L i den lille.
- Tømmer 3 L over i den lille og tømmer den. Da er det 6 L i den store. Den lille er tom.

Dette er ikke enkelt, og kanskje noen elever synes det er lettere å *ikke* tenke baklengs. Baklengstenkingen krever også at man må prøve seg litt fram.

Lærerens rolle

Det er lett å undervurdere betydningen lærerens opptreden har for å etablere et miljø for matematisk problemløsing i en klasse. Læreren bør legge vekt på eksplisitt undervisning når elevene skal lære nye problemløsingsstrategier. Problemløsing bør utgjøre en sentral del av matematikkundervisningen. (NRICH Primary Team and Jenny Earl). I tillegg til de åtte aspektene ved kommunikasjon som er nevnt innledningsvis, er det verd å tenke over fem andre momenter knyttet til implementering av problemløsingsoppgaver (NCTM, 2014). Det er lærerens oppgave

- å motivere elevenes matematikklæring ved å gi dem mulighet til å utforske og løse problemer som bygger på og utvider den matematikkforståelsen de allerede har
- å velge problem som gir elevene mulighet til å velge flere ulike strategier, verktøy og representasjoner
- å prioritere kognitivt krevende oppgaver fremfor rutineoppgaver
- å støtte elevene som utforsker en problemstilling uten å ta over elevenes tenking
- å oppfordre elevene til bruke ulike tilnærminger og strategier for å forstå og løse oppgavene

Oppgavene i eksemplene over er valgt med tanke på at målet for timen primært er å løfte fram en problemløsingsstrategi. Det er allikevel viktig å være åpen for at elevene kan velge helt andre strategier enn det læreren hadde i tankene. Hvis ingen elevgrupper velger den strategien læreren hadde i tankene, kan læreren under oppsummeringen, *etter at* elevene har presentert sine strategier, for eksempel si: «I en annen klasse var det en gruppe som gjorde det på denne måten: ….». Til slutt diskuterer klassen hvilke metoder de synes er enklest, hvilke som kan brukes i andre og liknende situasjoner, hva slags matematikk de må kunne for å bruke de ulike metodene, og så videre.

Etter hvert som elevene behersker flere problemløsingsstrategier, bør de matematiske ideene i oppgaven være målet. Oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde (LIST-oppgaver) er særlig egnet til bruk i hel klasse. Slike oppgaver er enkle å komme i gang med samtidig som de bærer i seg muligheter til utvidelser som leder til interessante matematiske sammenhenger.

Flere av eksemplene vi har tatt fram her, kan føre til nye spørsmål og mer utforsking.

Oppgaven med summen av fire etterfølgende partall, kan utforskes videre:

- Hva hvis det var oddetall? Hvilke summer kunne fungere da?
- Hva hvis det var tall i 5-gangen?
- Hva hvis det var flere enn fire tall som skulle summeres?

Oppgaven med trekantene ga interessante spørsmål:

- Var det virkelig en gylden trekant som ga samme areal som den rettvinklede, eller var det bare *nesten* en gylden trekant?
- Kan det tenkes at en gylden trekant og en rettvinklet trekant med samme omkrets alltid har samme areal?
- Er det alltid sånn at når man har en mangekant med en gitt omkrets, så vil det være den regulære mangekanten som har størst areal? Kan det bevises generelt?

Der problemløsing er en sentral del av matematikkundervisningen vil matematiske problem både være en inngang til å lære ny matematikk og til å utvide og trenge dypere inn i temaer elevene allerede har en viss innsikt i.

Referanseliste

Amit, M. & Portnov-Naaman, Y. (2017). *Explicit Teaching'as an Effective Method of Acquiring Problem Solving Strategies-The Case of "Working Backwards"*. Innlegg presentert ved CERME 10, Dublin.

Boaler, J. (2017). Recommendations for task/lesson design. Hentet fra www.youcubed.com

Botten, G. (2011). *Meningsfylt matematikk: nærhet og engasjement i læringen* (4. utg.). Bergen: Caspar Forlag.

Johnson, K., Herr, T. & Kysh, J. (2003). *Crossing the river with dogs: Problem solving for college students* Springer Science & Business Media.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping students learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kongelf, T. R. (2011). What characterizes the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway. *Nordic Studies in Mathematics Education, 16*(4), 5-44.

Leer, L. G. (2009). *Vurdering av matematisk problemløsning* Institutt for matematiske fag, NTNU.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (2nd ed)*. Garden City, N.Y: Doubleday.

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E. & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense Publishers Rotterdam.

Vedlegg

Flere oppgaver:

Kvadrat i trekant

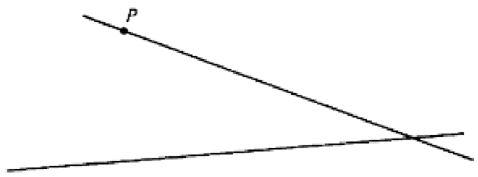
Tegn en vilkårlig trekant. Konstruer et kvadrat som er innskrevet i trekanten med to hjørner på grunnlinja og de to andre hjørnene på hver av de andre sidene i trekanten.

Maksimalt areal

Et rektangel har omkrets 100. Hva er det største arealet rektangelet kan ha?

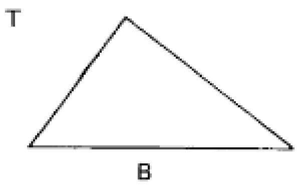
Tangenter og sirkel

Du har gitt to rette linjer og et punkt P markert på en av dem. Vis hvordan du kan konstruere, med passer og linjal, en sirkel som er tangent til begge linjene, og som har P som tangeringspunkt på den ene linja.



Trekant og areal

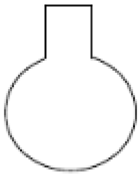
Du har gitt en bestemt trekant T med grunnlinje B. Vis at det alltid er mulig å konstruere en rett linje som er parallell med B og som deler T i to deler med samme areal.



(Carlson og Bloom, 2005, oversatt av artikkelforfatteren).

Flaskeproblemet

Tenk deg at denne flaska skal fylles med vann. Lag en skisse av en graf som viser høyden som en funksjon av mengden vann i flaska.



Papirbretteproblemet

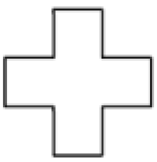
Et kvadratisk papir ABCD er hvitt på den ene siden og svart på den andre. Arealet er 3. Hjørne A brettes over til et punkt A´ som ligger på diagonalen AC, slik at av arealet som er synlig er halvparten hvitt og halvparten svart. Hvor langt er det fra brettekanten til A´?

Speilproblemet

To tall er «speiltall» hvis det ene tallet kan dannes av det andre ved å bytte om rekkefølgen på sifrene (det vil si at 123 og 321 er speiltall). Finn a) to speiltall med produkt 9256 og b) to speiltall med sum 8768.

Polya-problemet

Hver av sidene i figuren har lik lengde. Det er mulig å lage et kutt langs en rett linje slik at figuren deles i to biter. Deretter kan en av bitene kuttes langs en rett linje i to biter. De tre bitene kan settes sammen slik at de danner to like kvadrater satt inntil hverandre, det vil si et rektangel med lengde lik det dobbelte av bredden. Bestem de to nødvendige kuttene.



Flere oppgaveideer med drøfting finner du for eksempel i Breiteig (2008). http://www.caspar.no/artikkel_pdf/35c_t2008-1.pdf.