Ole Enge, Anita Valenta

Argumentasjon og regnestrategier

Undersøkelser (se for eksempel Boaler, 2008) viser at det er en stor forskjell på hvilke oppfatninger matematikere og folk flest har om matematikk. Mens matematikere fremhever fagets resonnerende natur, problemløsning og kreativitet, beskriver folk flest matematisk arbeid som noe som dreier seg om å huske regler, og å huske hvordan de skal brukes riktig. Det er ingen andre fag der forskjellen er så stor i hvordan fagets natur oppfattes av de som jobber med faget og de som ikke gjør det. Når folk flest skal regne ut et regnestykke som for eksempel 245·23 eller 20011 – 9875, setter de som oftest i gang med et oppsett de har lært på skolen, prøver å huske alle stegene, og å bruke dem i riktig rekkefølge. Fremgangsmåten fører frem til et svar som ikke på noen måte blir vurdert i forhold til de involverte tallene, eller operasjonen som skulle gjennomføres. De fleste matematikere i undersøkelsen Boaler (2008) refererer til, starter med å se på tallene og tenke gjennom hva som kan være mulig og fornuftig med de gitte tallene og den gitte operasjonen. Ofte ser de seg ikke ferdig med oppgaven når de kommer frem til svaret, men prøver å finne en mer effektiv strategi enn den første. Et vanlig, kjedelig regnestykke kan bli til en lek og matematisk utforskning.

Det å kunne regne i matematikk innebærer mer enn å kunne følge et oppsett, selv om man husker det riktig og kommer fram til et riktig svar. I Læreplanverket for kunnskapsløftet (KD, 2006) fremheves det at elevene i barneskolen bør utvikle og bruke varierte strategier i regning, både i hoderegning og skriftlig regning. I denne prosessen skal elevene kunne utnytte tabellkunnskaper, egenskaper til de involverte tallene, samt sammenhenger mellom de ulike regneoperasjonene. Videre skal elevene kunne forklare beregninger og fremgangsmåter og argumentere for disse. Strategier man har utviklet selv, som man har begrunnet og argumentert for, trenger ikke huskes som regler – de kan alltid gjenskapes om man er i tvil om hvordan de brukes. Å regne gjennom, å vurdere tallene og bruke deres egenskaper, finne en fornuftig måte å angripe problemet på, tegne, undersøke, resonnere og argumentere. Alt dette handler om mer enn å regne på en måte som er i samsvar med det faget handler om – det handler om *lære å tenke matematisk, gjøre matematikk* generelt.

Det ligger i matematikkens natur at en alltid skal kunne argumentere for en fremgangsmåte/

Anita Valenta
Høgskolen i Sør-Trøndelag
anita.valenta@hist.no

Ole Enge
Høgskolen i Sør-Trøndelag
ole.enge@hist.no

strategi. Et slikt argument skal være slik at det ikke gir rom for tvil om at strategien fører frem, og at den gir en riktig konklusjon, et riktig svar. Et annet element som kjennetegner matematikk er generalisering. Det er sjeldent man er interessert i en strategi som gjelder bare for de tallene som er gitt i en konkret oppgave. Det man er interessert i er om strategien kan brukes mer generelt, gjelder den for alle tall, eller gjelder den kanskje bare tall av en spesiell type? Og hvis den kun kan benyttes for spesielle tall, hvilke er det og hva er spesielt med dem? Videre prøver man gjerne å se om strategien virker for andre matematiske operasjoner, eller om den må justeres.

I denne artikkelen skal vi se på hva som kan være elementer av matematisk tenking når man regner på barnetrinnet, og hvordan det kan legges til rette for at elevene utvikler varierte regnestrategier som de klarer å argumentere for og bruke fleksibelt. Her starter vi med selve kjernen i alt matematisk arbeid, det vil si matematisk argumentasjon (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 129). Vi vil se nærmere på hva det innebærer å argumentere for en utregning i oppgaver som er «rene regneoppgaver», altså oppgaver av typen 26 + 37, 32 – 14 eller 12 · 4.

Fremgangsmåte kontra argumentasjon

Vi er på 2. trinn og elever jobber med oppgaven 31 + 26. En av elevene, Mari, skriver følgende:

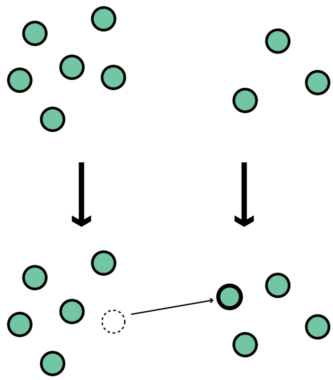
31+26 30+27 57

Læreren spør hvordan hun har tenkt. Mari sier: «Jeg flyttet 1 fra 31 til 26. Da blir det 30 + 27, og det er lettere å regne da – det blir 57.»

Det er åpenbart for oss lærere at Mari bruker en strategi som både fungerer i den gitte oppgaven og som kan brukes generelt i addisjon av to vilkårlige tall. Dermed kan vi lett tenke at det Mari sier er en forklaring og argumentasjon for fremgangsmåten. Men har Mari egentlig argumentert for hvorfor denne strategien virker i den gitte oppgaven og generelt, eller har hun bare fortalt HVA hun har gjort og ikke hvorfor?

Vi kan ta en liten test: Vi kan tenke oss at Mari jobbet med 31 – 26 i stedet, og at hun sa at man kunne flytte 1 fra 31 til 26; da får man 30 – 27 og det blir 3 slik at svaret på 31 – 26 blir 3. Vi ser at svaret blir feil og at strategien ikke virker, og dermed forstår vi at Maris argumentasjon i subtraksjonsoppgaven ikke holder. Hennes argumentasjon i addisjonsoppgaven er av samme typen, og da må vi vel si at hennes argumentasjon heller ikke der kan betraktes som gyldig matematisk argumentasjon, selv om strategien hun bruker virker i addisjon. Spørsmålet som kan lede oss videre til en gyldig matematisk argumentasjon her er: «Hvordan visste du at du kunne gjøre det slik, at det blir samme svar når du flytter 1 fra det ene tallet til det andre tallet i et addisjonsstykke?»

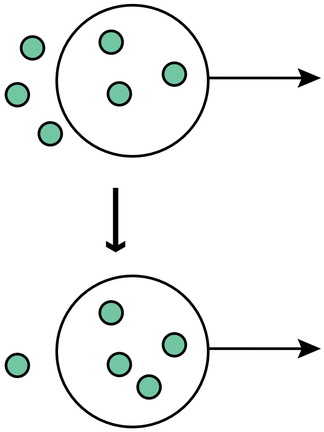
En mulig argumentasjon her ville vært av typen: «Hvis Martin har 31 biler og Stian har 26, og vi skal se på hvor mange de har til sammen, blir det like mange biler til sammen selv om Martin gir en bil til Stian. Derfor har 31 + 26 samme svar som 30 + 27.» Eller «Hvis man har to bunker med noe og så ser man på hvor mye det blir til sammen, blir det like mye til sammen hvis vi flytter ett element fra den ene bunken til den andre.» (Se figur 1.)



Figur 1.

Vi ser i begge utsagn ovenfor at addisjon kommer tydelig frem – det er to mengder og det er spørsmål om *antall til sammen*. Videre ser vi klart at «det å flytte 1» vil virke i alle addisjonsstykker med positive tall, uansett hvilke tall det gjelder. Denne generaliseringen er inkludert i det andre utsagnet i og med at det ikke diskuteres noen spesielle tall, men bare «to bunker med noe» (altså hvilke som helst positive tall). Også i det første utsagnet er det åpent for å gjøre generaliseringen – bytter vi ut tallene 31 og 26, ser vi nemlig lett at konklusjonen ikke blir påvirket av det. Argumentasjonen ovenfor åpner også for en videre generalisering: vi ser at det går fint «å flytte mer enn 1» fra det ene tallet til det andre, svaret blir det samme. I talleksemplet vi ser på her, betyr det at $31 + 26 = 30 + 27 = 20 + 37 = 17 + 40 =$ osv.

Hvis vi skal argumentere for at man ikke kan flytte 1 fra det første tallet til det andre tallet i subtraksjon, kan man se for seg en mengde biler. Noen biler blir så tatt bort, og spørsmålet er hvor mange som er igjen. Hvis totalen går ned, og det som tas bort øker, ser vi at «det som er igjen» blir endret som vi kan se i figur 2.



Figur 2.

Strategien kan ikke virke i subtraksjon, og det kan vi se uten at vi trenger å regne ut og sjekke, og uten at vi trenger å forholde oss til noen konkrete tall i det hele tatt. Vi ser at den ikke vil gjelde for noen tall. Det å regne ut og se at svaret blir feil, gjør at vi kan si at strategien er feil. Likevel gir argumentasjonen ovenfor oss også et bilde for hva som blir feil og hvorfor, og det gir oss også en mulighet til å se hva som kan endres i strategien slik at den virker. For eksempel, endrer vi strategien til «ta bort 1 fra begge tallene», ser vi lett at denne virker. Mer generelt er det lett å se at «ta bort eller legge til samme tall til begge tallene i en subtraksjon» vil virke i subtraksjon).

Når man begrunner og argumenterer for en strategi, må man skille mellom

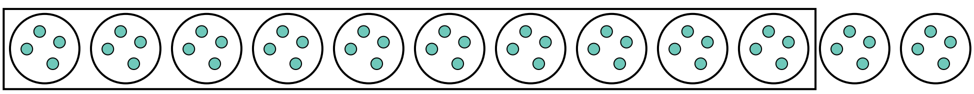
- selve strategien, dette er *hva* har man gjort,
- argumentasjonen, dette er *hvorfor* man kan gjøre det, *hvordan* vet man at det går an å regne slik.

I matematikkundervisningen må vi legge vekt på å komme «bak» regnestrategier, vi må komme fram til argumentasjoner for at strategier er matematisk korrekte.

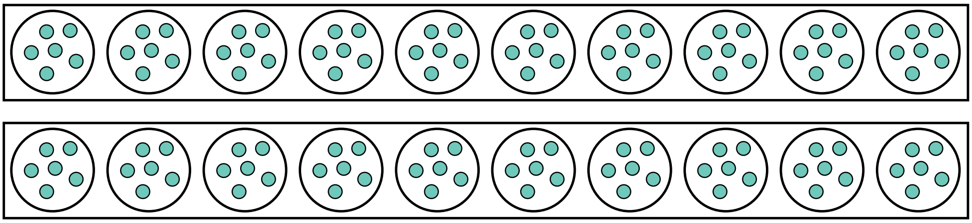
Man kan si at argumentasjonen ligger bak en strategi, og er grunnlaget for vårt valg av framgangsmåte. Før vi går inn i en drøfting om hva dette grunnlaget kan være i «rene regneoppgaver», ser vi på to eksempler innen multiplikasjon.

I oppgaven $12 \cdot 4$ kan en strategi være å dele opp 12 i 10 pluss 2 og multiplisere ledd for ledd, $10 \cdot 4 + 2 \cdot 4$. Argumentasjonen bak denne strategien kan være at man ser for seg hva $12 \cdot 4$ kan stå for. For eksempel kan vi tenke på 12 poser med 4 ting i hver pose. For å finne det totale antallet, kan vi først finne ut hvor mye det er i 10 poser, og deretter legge til antallet i de resterende 2 posene, se figur 3.

En mulig strategi for å regne ut $20 \cdot 6$, er å bruke at $20 \cdot 6 = 2 \cdot 60$, altså «flytte 0»-strategien. En argumentasjon for denne strategien kan være at man tenker 20 poser med 6 ting i hver pose. For å finne det totale antallet, kan man



Figur 3.



Figur 4.

slå sammen 10 og 10 poser i esker. Da får man 2 esker med $10 \cdot 6 = 60$, som vil si 60 ting i hver eske. Siden ingenting er lagt til eller tatt bort, ser man da at man KAN flytte 0, at $20 \cdot 6$ ER LIK $2 \cdot 60$ (se figur 4).

Bildet viser at det ikke er noe spesielt med disse tallene her. Så lenge et av tallene i en multiplikasjon har 0 på enerplassen, kan man «flytte 0». Gjennom et slikt bilde og dets generalisering har man dermed en generell argumentasjon for denne framgangsmåten.

Å argumentere for regnestrategier

Hva kan være et matematisk holdbart argument for en regnestrategi? En lærer i barneskolen må kjenne til ulike måter elever argumenterer på, og kunne vurdere om argumentasjonen er gyldig. Schifter, Bastable og Russell (2008) beskriver fire ulike argumentasjonsmåter, der to er matematisk gyldige. Carpenter, Franke og Levi (2003) har også en tilsvarende kategorisering og drøfting av måter å argumentere på. Nedenfor skal vi se nærmere på argumentasjonsmåter beskrevet av Schifter et. al. (2008). Deres kategorier er generelle i utgangspunktet, og beskriver argumentasjonsmåter i arbeid med tall generelt. Her vil vi derimot spesielt vise til argumentering for regnestrategier. Merk at det kun er strategi 3 og 4 som er matematisk gyldige.

1. Referere til autoriteter som lærer, læreboka, regelboka og foreldre. På spørsmålet om hvorfor man gjør slik man gjør og hvordan man vet at det blir riktig svar, viser elevene ofte til at læreren har vist at det er slik det skal gjøres, eller at det står i en bok. Det er viktig for elevenes holdning til matematikk at de opplever at det finnes en forklaring bak reglene og regnestrategiene, og at de sjøl kan være med å utvikle slike forklaringer.

2. En av de vanligste formene for argumentering brukt av elevene i barneskolen er **utprøving på konkrete eksempler,** der elevene sjekker på et eller flere eksempler at en strategi virker. For eksempel når man skal argumentere for at det går an «å flytte 0» i multiplikasjon, kan elevene regne ut et eller flere eksempler på en annen måte (uten å bruke «flytte 0») før de konkluderer med at det går an bare å flytte 0. Å regne ut og sjekke ett eller flere eksempler er ikke et holdbart matematisk argument, da vi aldri vil klare å sjekke noe for «alle tall». Så lenge man ikke vet *hvorfor* strategien virker, vet man ikke i hvilke tilfeller den virker, og om den virker generelt. At det ikke hjelper å sjekke noe på eksempler, selv om man sjekker hundrevis av eksempler, kan være utfordrende for elever, men samtidig er det en så grunnleggende matematisk tankegang at det ikke bør nedprioriteres. Tvert imot vil det å fremheve dette helt fra barnetrinnet, danne et grunnlag for videre matematikklæring, spesielt i forhold til algebra som er et område elever bruker å ha store problemer med (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Spørsmålet er om det går an å gjøre det så tidlig i skolen, og i så fall hvordan?

3. Typen argumentasjon som vi brukte ovenfor for å argumentere for de ulike regnestrategiene (med bunker, biler, poser), kalles ofte for

et **representasjonsbevis.** Argumentasjon som bygger på en tegning, bruk av konkreter eller en regnefortelling, kalles for et representasjonsbevis hvis *representasjonen* (det man viser med tegningen, konkreter eller regnefortellingen) oppfyller følgende kriteria:

- Betydning av den involverte operasjonen er representert tydelig i tegningen, konkretene eller regnehistorien.
- Representasjonen kan bli generalisert/tilpasset til å gjelde for en hel klasse eksempler, for eksempel alle hele tall.
- Strategien det argumenteres for kommer tydelig frem i representasjonen og konklusjonen, og om strategien virker eller ikke følger av representasjonen.

Ser vi tilbake på argumentasjonene vi har fremstilt for de ulike regnestrategiene, er det tydelig at disse kriteriene er oppfylt og at vi argumenterer gjennom representasjonsbevis. I argumentasjonen om «å flytte 0» i multiplikasjon, starter vi med et bilde der betydning av multiplikasjon er fremhevet. I og med at vi har multiplikasjon med positive hele tall, kan vi tenke oss «poser med samme antall ting i hver pose» som representerer multiplikasjonsstykket. Representasjonen tar utgangspunkt i de gitte tallene, 20 poser med 6 ting i hver pose, men kan tilpasses til å gjelde hvilke som helst positive heltall der et av tallene består av bare tiere (0 på enerplassen). Omgruppering – ti poser i en eske, ingenting er lagt til, ingenting er tatt bort – fører tydelig til konklusjonen at strategien «å flytte 0» holder i alle overnevnte regnestykker.

4. Den siste måten å argumentere på for regnestrategier er gjennom *bruk av algebraisk notasjon og bygging på egenskaper ved operasjoner som allerede er bevist.* La oss anta at elevene har argumentert tidligere for den assosiative egenskapen til multiplikasjon, altså at $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, der a, b og c er tre vilkårlige tall. Vi kan nå betrakte $20 \cdot 25$ som $(2 \cdot 10) \cdot 25$, og ved å bruke den assosiative egenskapen, ser vi at dette blir det samme som $2 \cdot (10 \cdot 25)$ på samme måte som i «å flytte 0»-strategien. Mer generelt kan man si at et tall som består av bare tiere kan skrives som $a \cdot 10$. Hvis et slikt tall skal ganges med et annet tall, la oss kalle det c, så er strategien med «å flytte 0» et spesialtilfelle av den assosiative egenskapen: $(a \cdot 10) \cdot c = a \cdot (10 \cdot c)$. Her argumenter vi for strategien ved å bygge på noe som er tidligere bevist, og siden strategien skal vises generelt innebærer det bruk av algebraiske symboler. På barnetrinnet er det gjerne slik at det som skal argumenteres for er «helt i bunnen», og vi har ikke så mye vi kan bygge på. I oppgaven der vi ser på $12 \cdot 4$ og bruker strategien med å dele opp 12 i 10 og 2, er det egentlig en grunnleggende egenskap ved multiplikasjon (distribusjon) vi prøver å argumentere for, og dermed er det ikke mulig å bygge på noe. En annen utfordring er den algebraiske notasjonen som må til for å argumentere for strategien generelt. I en overgangsfase kan man skrive «et tall» eller noe tilsvarende i stedet for symboler som a, når man diskuterer om noe som gjelder generelt for alle tall. Dette vil da være en overgang til mer algebraisering av regning når man nærmer seg ungdomsskolen.

I denne artikkelen ønsket vi å se nærmere på argumentasjon og utvikling av regnestrategier tidlig i skolegangen. Som det kommer frem i drøftingen ovenfor, har representasjonsbevis en svært viktig rolle her. Representasjonsbevis er matematisk gyldige, og gir samtidig et bilde som åpner for en forståelse for hva de ulike operasjonene står for. Videre inviterer de til en vurdering av ulike strategier både i forhold til operasjonen og de involverte tallene. Om strategien ikke virker, kan man gjennom bruk av representasjoner ofte få et bilde på *hvorfor* den ikke virker.

Å tenke på et regnestykke som et bilde eller regnefortelling, for eksempel to bunker som slås sammen i addisjon, eller som poser med samme antall i hver pose i multiplikasjon, gir også mulighet til å gjøre overslag og å vurdere svar. Mange elever tenker ubevisst på noen bilder av regnestykker når de skal komme med et overslag, regne skriftlig eller regne i hodet. Disse bildene er grunnlaget for tallforståelse og regning, og som vi har sett, åpner de for dyp matematisk tenking, argumentasjon og generalisering tidlig i skolegangen. Dermed er de et av de viktigste redskapene vi har når vi skal tenke matematisk i regning, og det er viktig at elevene tar i bruk disse bildene som redskaper mer bevisst.

Referanser

Boaler, J. (2008). *What's math got to do with it? Helping children learn to love their least favorite subject-and why it's important for America.* USA : Penguin Group.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth: N.H., Heinemann.

Kilpatrick, J. Swafford, B. Findell, (red.) (2001). *Adding it up*. Washington DC: National Academy Press.

KD (2006). *Læreplanverket for kunnskapsløftet*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Schifter, D., Bastable, V. & Russell, S. J. (2008). 'Developing mathematical ideas'. I *Reasoning Algebraically about operations, Facilitator's guide*. Dale Seymour Publications.