



Resonnering med GeoGebra

JANUAR 2019



Susanne Stengrundet
NTNU

Innholdsfortegnelse

INNLEDNING	3
GEOGEBRA SOM DYNAMISK VERKTØY	3
ANIMASJONER	4
RESONNERING MED GEOGEBRA	4
EKSEMPLER PÅ OPPGAVER SOM INVITERER TIL RESONNERING.....	5
<i>Eksempel 1: Areal av trekanter</i>	5
<i>Eksempel 2: Sporing for å finne skjæringspunktet</i>	6
<i>Eksempel 3: Sporing for å finne grafen</i>	6
<i>Eksempel 4: Bruke glidere til å undersøke grafer</i>	8
SAMMENDRAG	9
KILDER	9

Innledning

Helt siden det ble obligatorisk med digitale verktøy til eksamen, har GeoGebra hatt en sterk plass i den norske skolen. Programmet er gratis, og man kan bruke det til å gjøre det som kreves til eksamen på alle trinn. Programmet får imidlertid ikke den plassen det fortjener. Det kan brukes til mer enn å tegne og tolke grafer. Det skiller seg også fra de mange gode nettsidene med øvingsoppgaver og spill som kan berike matematikkundervisningen, for GeoGebra er et verktøy der elevene kan lage egne tegninger og løse oppgaver fra bunnen av. GeoGebra er med andre ord et verktøy som kan fremme læring ved å jobbe utforskende.

Denne artikkelen skal vise hvordan man kan bruke programmet til å oppnå dybdelæring gjennom utforskning og resonnering.

GeoGebra som dynamisk verktøy

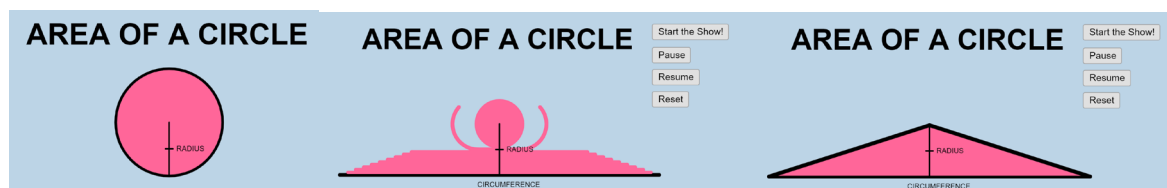
Som navnet sier, vil et dynamisk verktøy ha et aspekt av bevegelse i seg. I GeoGebra finnes det forskjellige typer bevegelser. Man kan bevege *et objekt på et objekt*. For eksempel kan man bevege et punkt som ligger på en linje, eller man kan bevege linjen som går gjennom punktet. Eksempel 1 illustrerer dette. Man kan også endre størrelsen og utseendet til objekter. Videre kan man dra i punkter for å se om en figur som ser ut som et rektangel, virkelig er et rektangel.

Det andre alternativet er å bevege objekter etter bestemte egenskaper. For eksempel kan man undersøke hva som skjer hvis et punkt beveger seg etter gitte betingelser. Sporing er et godt hjelpemiddel for å vise dette. Eksempel 2 og 3 illustrerer denne formen for bevegelse.

Det tredje alternativet, som også er den metoden som brukes oftest, er å lage glidere. I de nyere utgavene av GeoGebra spør programmet om man vil lage en glider så snart man skriver en ukjent variabel. Med glidere kan man bevege objekter trinnvis, eller man kan animere gliderne slik at verdiene endrer seg kontinuerlig. Det gjør at elevene får en oversikt over situasjonen og kan resonnerer og finne mange eksempler ved å flytte gliderne trinnvis. Studier har vist at elever som ikke har tilgang til glidere, bruker færre eksempler for å komme til en konklusjon (Brunström 2015).

Animasjoner

Når man ønsker at elevene resonnerer, må de bli presentert for oppgaver som inviterer til utforskning. Oppgavene kan med fordel ende med uventete svar. Det finnes mange gode animasjoner på de internasjonale GeoGebra-sidene, slik som [areal av sirkelen](#) (se *Figur 1*) som illustrerer sammenhengen mellom areal og omkrets av en sirkel. Slike animasjoner hjelper til å visualisere matematiske sammenhenger. Animasjonen gir en forklaring for beregning av arealet til sirkelen, men den alene fører ikke til dybdelæring.



FIGUR 1

Det er først når elevene opparbeider forståelse av de matematiske sammenhenger at denne illustrasjonen kan føre til en varig forståelse av arealet av sirkelen. Det vil si først da har de oppnådd en dypere forståelse om sammenhengen mellom areal og omkrets til en sirkel.

Grunnen til at mange lærere bruker ferdige konstruksjoner, er gjerne tidsaspektet. Lærere legger vekt på den matematiske forståelsen av det aktuelle problemet, men de glemmer ofte at forståelsen av programmet i neste omgang kan føre til bruk av flere deler av programmet og til bruk av GeoGebra i flere matematiske emner. Jo mer elevene kan om programmet, jo flere bruksmuligheter for verktøyet ser de. Mange ideer blir liggende hvis elevene ikke har god kunnskap om selve programmet.

Resonnering med GeoGebra

Denne artikkelen tar utgangspunkt i Brunströms (2015) definisjon av resonnering som omfatter aktiviteter som å forutsi, finne mønster, stille hypoteser, motivere, generalisere, forklare og bevise. Hvis resonnering med GeoGebra skal føre til dybdelæring, er det best at elevene begynner å arbeide med blanke ark. Da lærer de programmet og det matematiske innholdet samtidig, siden de blir involvert i hele prosessen. Brunström (2015) har vist at elever som begynner å jobbe med blanke ark og GeoGebra, vil lage hypoteser tidligere.

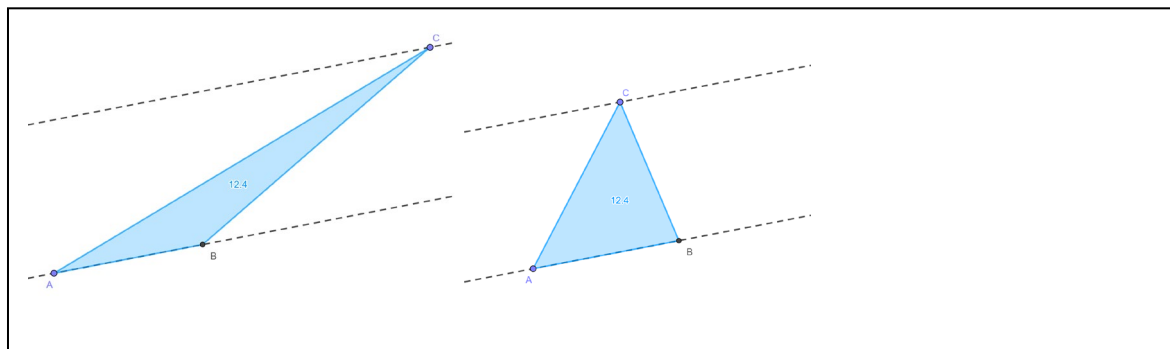
Oppgaven starter gjerne ved at elevene gjetter hva som skjer og noterer det skriftlig, ofte med en tegning. Deretter skal de lage hypoteser. Slike gjettinger skal være gjennomtenkte og formuleres eksplisitt. Senere i prosessen vil elevene utnytte at man kan bevege objekter til å verifisere eller forkaste hypotesene. Det er i denne fasen at elevene ofte lager glidere.

Glidere gir et godt visuelt bilde som øker forståelsen for mange elever. Glideren blir dermed en tredje representasjon, ved siden av formel og graf. Læreren må imidlertid være bevisst på å jobbe med sammenhenger, for eksempel mellom grafen og funksjonsuttrykket. Denne sammenhengen kan ellers lett forsvinne bak det visuelle (Brunström, 2015). Det er viktig å fortsette med utforskning selv etter at en forklaring eller et matematisk bevis er formulert.

Eksempler på oppgaver som inviterer til resonnering

Oppgaver som kan løses med direkte modellering, trenger ofte ikke mer enn en kort instruksjon av læreren. Krever oppgavene derimot resonnering på mange plan, kan det være en fordel at elevene får et oppgaveark når de skal jobbe med utforskende oppgaver. Oppgavearket bør inneholde store ruter der elevene kan lage tegninger og notere gjettinger og hypoteser. Slike oppgaveark kan også inneholde noen tips til bruk av GeoGebra.

Eksempel 1: Areal av trekanter

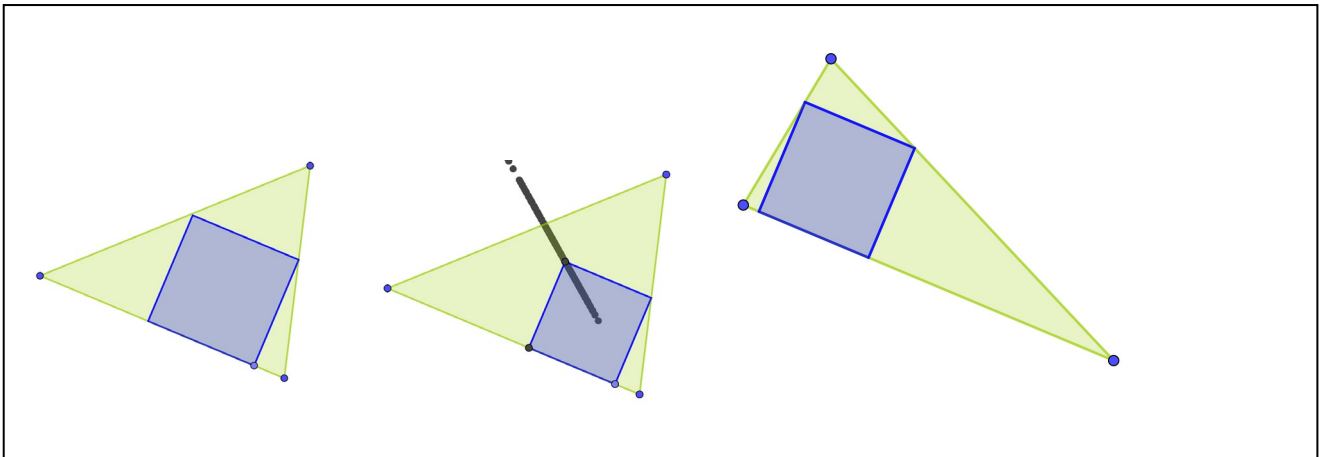


FIGUR 2

Direkte modellering vil si at man beveger et objekt på et annet objekt. Trekanten er tegnet mellom to parallelle linjer. Uansett hvordan man beveger hjørnet C, vil trekanten alltid ha det samme arealet, så lenge grunnlinjen er den samme. Denne muligheten for å endre formen og samtidig beholde arealet gir eleven en dypere forståelse for arealbegrepet og for formelen til arealet til trekanten. Elevene trenger ikke mer instruksjon enn å tegne to parallelle linjer og tegne inn en trekant med en side på den ene linjen og det tredje hjørnet på den andre linjen før de kan starte med utforskningen. Gir læreren elevene oppgaven som en ferdig fil vil elevene kunne resonnerer på den samme måten, men de vil gå glipp av å tegne parallelle linjer, sette av et linjestykke og et punkt og tegne inn en mangekant der arealet vises. Disse kunnskapene kan være nyttige for å klare en senere oppgave.

Eksempel 2: Sporing for å finne skjæringspunktet

En kjent oppgave er å finne et kvadrat som er tegnet inn i en trekant, slik at en side av kvadratet ligger på en trekantside, mens de andre hjørnene ligger på de andre sidene av trekanten. (se figur 3)



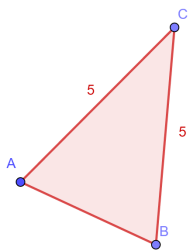
FIGUR 3

Mange elever vil finne en måte å tegne et kvadrat med en side på en trekantside og et hjørne på en annen trekantside, men det siste hjørnet er vanskeligere å plassere. Sporing av det fjerde hjørnet viser skjæringspunktet. Elevene ser at punktet ligger på en linje gjennom et hjørne i trekanten og et hjørne i kvadratet. Denne oppgaven viser hvordan GeoGebra på en visuell måte hjelper til å finne fram til løsninger. Hvis man beveger hjørnene til trekanten, ser man i tillegg at fremgangsmåten gjelder ikke bare for denne ene trekanten, men for mange forskjellige trekanter.

Eksempel 3: Sporing for å finne grafen

Dette eksemplet er hentet fra Maria Fahlgren og Mats Brunströms verksted i Novemberkonferansen 2018. (Teksten er oversatt og forenklet av forfatteren)

Konstruer en likebeint trekant med sidene AC og BC lik 5.



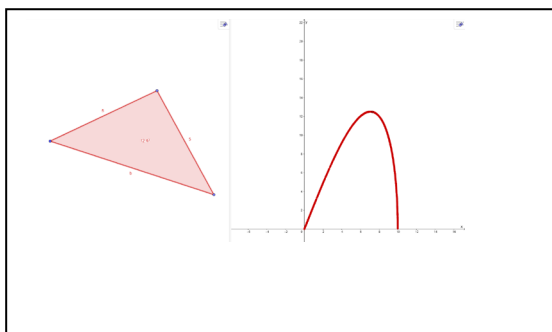
Når lengden av AB endres, så endrer selvsagt også arealet seg.

Hvordan endrer arealet seg som en funksjon av lengden AB?

Lag en grov skisse i koordinatsystemet nedenfor. Velg passende inndeling av aksene.

FIGUR 4

Gjetting fører til en parabel, men bruken av sporing viser at denne antagelsen er feil. Her er sporingen lagt til Grafikkfelt 2. Punktet som spores, er punktet med x-koordinaten lik grunnlinjen og y-koordinaten lik areal av trekanten.



FIGUR 5

For å forklare formen til grafen må elevene bruke kunnskapene de har om geometri og algebra. Å finne sammenhengen mellom ulike kunnskapsområder er et kjennetegn for dybdelæring. Eleven kjenner til formelen for areal til trekanter. Derimot er det ikke sikkert de vet at uttrykket «finn en formel for areal uttrykt med grunnlinjen, her b » betyr at man må erstatte h med b . Det vil med andre ord si at de må gjøre en algebraisk omforming. En mulig omforming er vist i figur 6.

Arealet til en trekant: $A = \frac{g \cdot h}{2}$

Pytagoras setningen gir $h = \frac{\sqrt{100 - b^2}}{2}$

som fører til $A = \frac{b \cdot \sqrt{100 - b^2}}{4}$

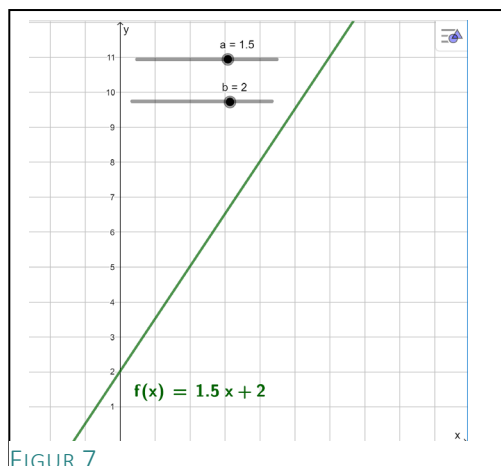
FIGUR 6

I uttrykket er det et rottegn som viser at det ikke er en andregradsfunksjon som man forventet. Hypoteser skal bekreftes og forklares før de bevises. Dette vil føre til bevis som bygger på forståelse. Både hypoteser og forklaringer skal noteres skriftlig. Oppgaven inviterer til videre utforskning. Hvordan ser grafen ut når man tegner arealet som en funksjon av høyden, eller hva skjer hvis trekanten ikke er likebeint?

Det kan være vanskelig for elever å holde styr på oppgaver som inneholder mange skritt og utfordrer ulike deler av matematikken som vist i eksempel 3. Derfor er det lurt at elevene får slike oppgaver på ark. Arket skal ha tomme ruter med god plass til å tegne og skrive. Elevene vil lettere kunne beholde oversikten og bruke mest mulig tid til utforskning og eksperimentering. Vekslingen mellom arbeid med GeoGebra og arbeid på papir vil gi et godt utgangspunkt til dybdelæring. I tillegg vil oppdrag som «formuler en hypotese» føre til mer utfyllende og gjennomtenkte utsagn enn hvis det bare står «lag en hypotese» (Fahlgren, 2015).

Eksempel 4: Bruke glidere til å undersøke grafer

Hvis man skriver $f(x) = ax + b$ inn i GeoGebra, ber programmet om glidere.



FIGUR 7

Trinnvis bevegelse av glidere fører til en endring av grafen i grafikkfeltet. Elevene vil oppdage at glider a fører til at stigningen til grafen endres, mens glider b flytter grafen langs y-aksen. Dette gir en annen forståelse av begrepene «stigningstall» og «konstantledd» enn forklaringen i tradisjonelle lærebøker. Hvis elevene må resonnerer over og skrive ned hva som skjer hvis a er negativ, $b = 0$ osv. før de flytter gliderne, vil de kunne oppnå en dypere forståelse for førstegradsfunksjoner.

Sammendrag

GeoGebra er et godt hjelpemiddel i matematikkundervisningen. Verktøyet er dynamisk. Det at objekter kan bevegges, gjør at hittil ukjente sammenhenger kan visualiseres. Det kan føre til mange observasjoner som er overraskende for elevene. Et godt opplegg for arbeid med digitale verktøy skal oppfylle noen kriterier (Fahlgren,2015). Oppgaven skal være åpen slik at den inviterer til utforskning. Oppgavearket skal ha en logisk struktur, som vil si at elevene først blir bedt om å notere hva de ser, før de lager forklaringer og hypoteser. Elevene starter med blanke ark. Da blir de ikke bare bedre kjent med problemet som de skal undersøke men utvikler samtidig sin kompetanse i GeoGebra. Det er viktig at elevene noterer alle observasjoner og konklusjoner med egne ord.

Det er først når man jobber med sammenhengen mellom representasjoner og de matematiske uttrykksformer at man oppnår dybdelæring gjennom arbeidet med GeoGebra.

Kilder

Fahlgren.M, Brunström. M.(2018) GeoGebra - en lärandemiljö för utforskande elevaktiviteter, Novemberkonferansen 2019, Trondheim

Fahlgren M. (2015), Designing for the integration of dynamic software environments in the teaching of mathematics, Karlstad University studies

Brunström. M. (2015). Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiske matematikprogram, Karlstad University Studies