



Dybdelæring – begrepene brøk og desimaltall

APRIL 2019



Susanne Stengrundet, Anne-Mari Jensen og Ingunn Valbekmo
NTNU

Innholdsfortegnelse

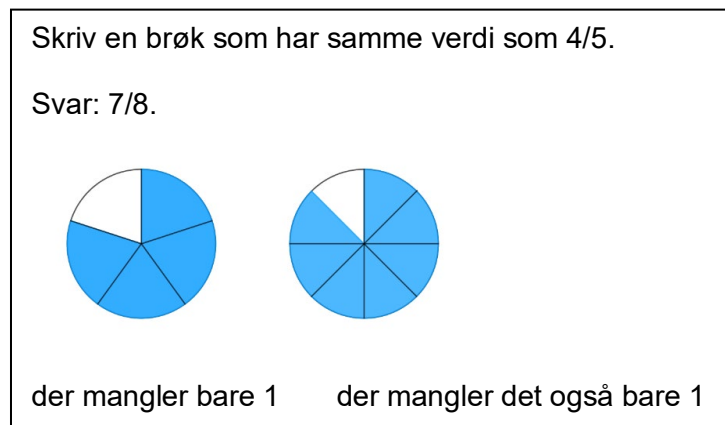
| | |
|--|-----------|
| INNLEDNING | 3 |
| BRØK | 3 |
| HVOR LIGGER PROBLEMET? | 4 |
| <i>Brøk som del av en hel</i> | 4 |
| <i>Brøk som del av en mengde</i> | 5 |
| HVORDAN KAN VI ARBEIDE FOR Å SKAPE BEDRE FORSTÅELSE? | 6 |
| <i>Visualisering</i> | 6 |
| <i>Sammenligne og sortere</i> | 8 |
| DESIMALTALL | 9 |
| HVOR LIGGER PROBLEMET? | 9 |
| HVORDAN KAN VI ARBEIDE FOR Å SKAPE BEDRE FORSTÅELSE? | 10 |
| | 11 |
| DYBDELÆRING HANDLER OM Å SE SAMMENHENGER | 11 |
| KONKLUSJON | 12 |
| REFERANSER | 13 |

Innledning

Denne artikkelen bygger på artikkelen «Begrepslæring og begrepsforståelse i matematikk». Der ser vi på ulike typer begrep og begrepsstrukturer. Her vil vi se på begrepene brøk og desimaltall. Artikkelen forteller noe om vanskeligheter elever kan møte når de arbeider med brøk og desimaltall.

Brøk

Før man begynner å regne med brøk er det helt avgjørende at brøkbegrepet er godt etablert. Undersøkelser viser at mange feil i regning med brøk skyldes manglende brøkforståelse. Eksemplet i figur 1 er hentet fra Misoppfatning knyttet til brøk (Tokle et al., 2018) og viser at eleven bare teller antall deler og ikke tar hensyn til størrelsen av delene. Selv med den riktige grafiske framstillingen som tydelig viser at $7/8$ er større enn $4/5$, holder eleven fast at det er like mye. Hun begrunner det med antall deler som mangler til en hel.



FIGUR 1

Eksemplet i figur 2 viser at elevene bruker kunnskapene fra naturlige tall når de skal avgjøre størrelsen av brøker (Tokle et al., 2018). Mens forholdet mellom teller og nevner egentlig er en multiplikativ relasjon¹.

¹ Mer om dette finner man under Pakke Misoppfatninger i matematikk

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\quad}$$

Hva skal stå i den tomme ruta?

Svar: 3

Fant ut hva de har plusset på en også plusset det samme under

FIGUR 2

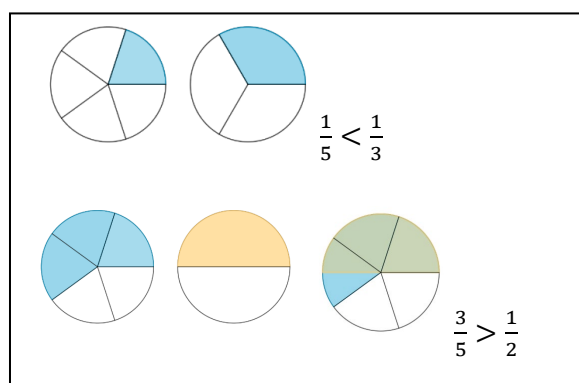
Hvor ligger problemet?

Brøk som del av en hel

Elevene ser ikke bitene som del av en hel. I figur 1 er helheten like stor i begge brøkene. I tillegg skal alle 4 biter i $\frac{4}{5}$ være like store og alle 7 bitene i $\frac{7}{8}$ være like store. Problemet med slike feilsvar kan oppstå fordi elevene ikke har innarbeidet brøkbegrepet godt nok. De ser ikke på størrelsen av de ulike brøkdelenene, kun på antall. Forskjellen mellom teller og nevner er 1 i begge brøkene, og derfor mener elevene at brøkene er like store.

For å vise brøk som del av en hel er arbeidet med brøkbrikker eller brøkstaver et godt visuelt hjelpemiddel. Det må spesielt legges vekt på at ikke bare antallet biter er viktig, men også størrelsen av bitene. Jo flere biter man trenger for å fylle en hel, jo mindre er bitene.

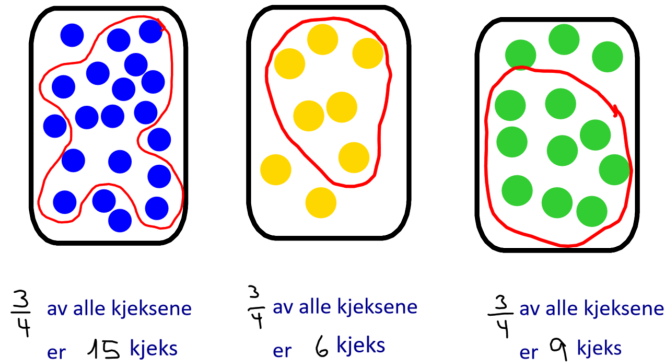
Eleven vil se at $\frac{1}{5}$ er mindre enn $\frac{1}{3}$ og at det derfor trengs 5 brikker av $\frac{1}{5}$ og bare 3 brikker av $\frac{1}{3}$ for å lage en hel. På samme måten kan man vise at $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{1}{2}$ (se figur 3).



FIGUR 3

Brøk som del av en mengde

Marker $\frac{3}{4}$ av dropsene i esken

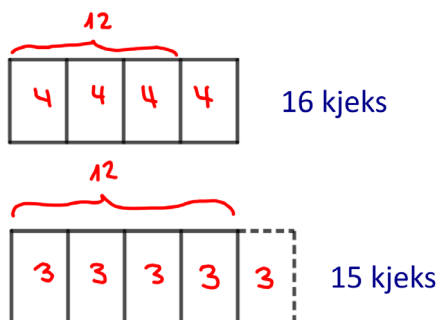


FIGUR 4

I figur 4 er det ulike mengder med drops og elevene har markert $\frac{3}{4}$ i de tre forskjellige boksene. Hvordan kan $\frac{3}{4}$ være så ulike tall? Elevene trenger hjelp til å skille mellom brøk som del av en hel og brøk som del av en mengde. Spesielt brøk som del av en mengde kan være vanskelig å forstå, når brøkdelen er gitt og ikke hele mengden, som det neste eksemplet viser.

Karl har spist 12 kjeks, det er $\frac{3}{4}$ av alle kjeksene i boksen. I en slik oppgave er både 16 kjeks og 15 kjeks like hyppige svar. Også i denne oppgaven er brøken $\frac{3}{4}$ en del av en mengde.

Figur 5 viser at mange elever bruker det oppgitte tallet som helhet og de deler derfor 12 i fire like deler. Deretter legger de til en firedel og får 15 kjeks totalt. Den første tegningen i figur 5 viser derimot det riktige antall kjeks. Tegninger som denne vil kunne hjelpe elevene til å forstå sammenhengen ved at de blir utfordret til å forklare hvorfor bare det ene svaret er riktig.



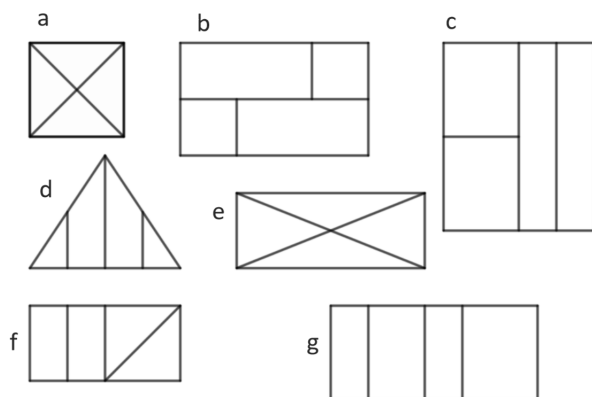
FIGUR 5

Hvordan kan vi arbeide for å skape bedre forståelse?

For å hjelpe elevene kan læreren gi oppgaver som utfordrer og utdyper forståelsen av hva en brøk er. Elevene vil ha vanskeligheter med å utdype forståelsen, hvis brøken alltid forbindes med pizza eller kake. Disse modellene kan ikke brukes når brøken er en del av en mengde. Det er viktig at man arbeider godt med brøkbegrepet, før man går over til regning med brøk. Regning med brøk er en integrering av kunnskap fra regning med hele tall inn i emnet brøk.

Visualisering

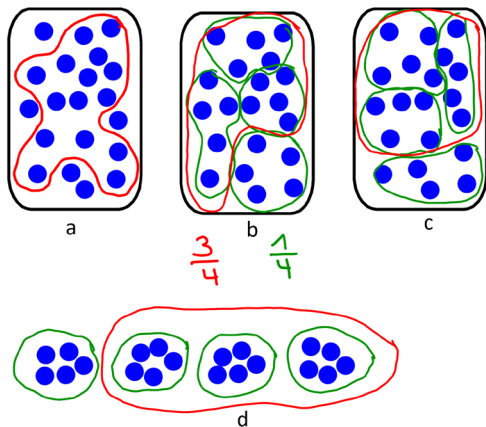
Som nevnt kan arbeidet med brøkbrikker og brøkstaver øke forståelsen for brøkbegrepet som del av en hel. I disse konkretene er figurene allerede inndelt i deler, som både er formlike og like store. Resultatet kan da bli at elevene tror at like store deler må ha lik form. Det er viktig at elevene får se at det er arealet av figuren som er avgjørende og ikke formen. I figur 6 er alle figurer delt inn i fire deler, men ikke alle deler er $\frac{1}{4}$. La elevene undersøke hvilke figurer som er delt inn i 4 like store deler. Elevene skal også argumentere for løsningene sine. Et tips kan være å la elevene klippe og brette ark.



FIGUR 6

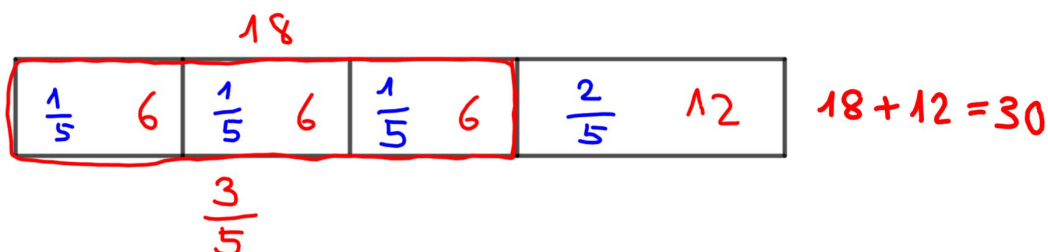
Figur 7 viser tre bilder av samme mengde drops. Den mengden som utgjør $\frac{3}{4}$ av posen er markert på ulike måter. Tegning *a* viser et mulig svar, men forklarer ikke hvorfor man må tegne ring rundt 15 brikker. I tegning *b* og *c* blir mengden drops først delt inn i fire deler for så å markere 3 deler for å finne mengden som utgjør $\frac{3}{4}$. Tegning *d* viser elever som har fått drops (tellebrikker). De lager først fire like hauger før de markerer og teller tre av haugene. Mange elever vil ha stort utbytte av å kunne fysisk ta på brikker, istedenfor å ringe rundt et

antall på papir. For å få en dypere forståelse av brøk som del av en mengde er det viktig at elever ser at det ikke alltid blir 15 hvis man tar $\frac{3}{4}$ av noe. Figur 4 viser eksempler der den hele mengden varier og $\frac{3}{4}$ av posen derfor blir forskjellige antall drops.



FIGUR 7

Vanskelighetsgraden i en oppgave blir større når mengden som er gitt er en brøkdel av det hele, altså at totalen er ukjent. Blokkmodellen som ble presentert i figur 5 kan være visuell støtte mot forståelse. Inn i modellen kan man skrive både tall og brøk alt etter hva som passer best for den enkelte. Blokken representerer det hele. Figur 8 viser hvordan man kan bruke blokkmodellen for å finne det hele når $\frac{3}{5}$ er 18. Eleven tegner et rektangel som forestiller det hele. Så tegner hun inn et rektangel som skal forstille $\frac{3}{5}$ og deler det i 3 like deler. For å tenke ferdig er det ikke nødvendig at de siste $\frac{2}{5}$ har den riktige størrelsen. Modellen har hjulpet eleven til å komme fram til et riktig svar.



FIGUR 8

Sammenligne og sortere

Mange elever vil ha vanskeligheter med å se at to brøker har samme verdi, når de er skrevet på forskjellige måter.

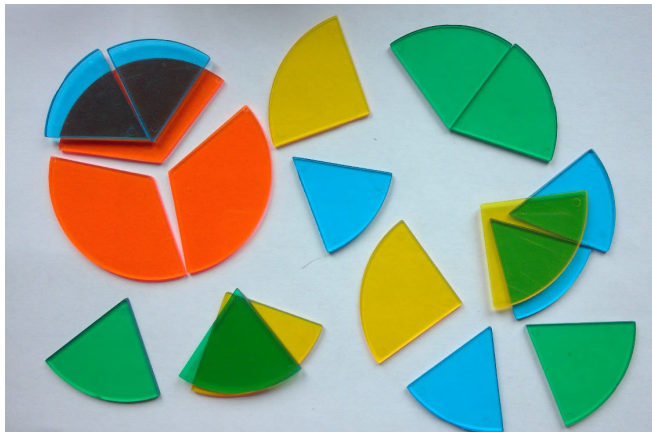
Å finne brøker som er like store som $\frac{2}{3}$ kan være utfordrende. Med brøkbrikker eller brøkstaver er det lett å se at $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ og $\frac{8}{12}$ har samme verdi. Dette kan gi et godt utgangspunkt til å se den multiplikative sammenhengen mellom teller og nevner. Man trenger flere, men mindre brikker hvis nevneren blir større. Etter hvert vil elevene oppdage at både teller og nevner blir multiplisert med 2 fra den ene brøken til den andre. Finnes det flere brøker med samme verdi? Stemmer det også hvis man multipliserer med 3 eller 5? Hva er det egentlig man gjør når man multipliserer både teller og nevner med samme tall? Kan de vise det med brøkbrikker eller med tegning? Slik utforskning kan føre til forståelse av den multiplikative sammenhengen mellom brøker av samme verdi.

Sett ring rund den største brøken.

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{4}{5}$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|

FIGUR 9

Elever liker å sortere. Figur 9 viser en oppgave hvor den riktige løsningen bare er første skritt. For å få en god begrepsforståelse må elevene kunne argumentere for løsningen sin. Det holder ikke å si brøken $\frac{5}{6}$ er størst, hvis eleven ikke samtidig sier at delene er mindre. «Det trenges bare 3 oransje brikker for å få en hel fordi delene er store. Vi trenger 5 grønne brikker en hel, fordi brikkene er mindre enn de gule brikkene. Vi trenger 6 turkisfargede biter for å få en hel. Hver av grønne brikkene er halvparten så stor som de oransje brikkene...» (figur 10). Her argumenterer man ut fra en resttenking, man ser på den resten man mangler før man har en hel. $\frac{5}{6}$ er størst fordi den delen som mangler før man har en hel er $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{6}$ er mindre enn de andre restdelene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{5}$ fordi størrelsen på nevneren sier noe om størrelsen på bitene. Jo større nevner, desto mindre biter.



FIGUR 10

Når brøkbegrepet er etablert vil kunnskapen kunne utvikles til brøkgregning. Den multiplikative karakteren til brøk vil danne et godt grunnlag for faktorisering som er viktig når elevene arbeider med algebra.

Desimaltall

Elevene møter tidlig desimaltall i dagliglivet ved måling på ulike vis. Dette kan være måling av tid, lengde, volum eller masse. Hvis man spør elevene hvem som får mest brus av Ola som får 0,33 liter og Per som får 0,5 liter, vil de svare at Per får mest. De fleste elever liker brus og vet at det er mer Cola i en halvliters flaske enn i en liten boks. Spør man derimot om hva som er størst 0,8 og 0,45 vil ikke svaret være like klart. Mange elever vil tro at tallet med flest siffer er størst. Det vil si at de overgeneraliserer kunnskaper de har fra naturlige tall.

Hvor ligger problemet?

En vanlig misforståelse er at elevene ser et desimaltall som to atskilte tall. Da tenker elevene at jo flere desimaler, jo større er tallet. I tillegg kan 0 som plassholder skape problemer². Eleven tenker 0,09 er større enn 0,3 fordi 9 er større enn 3. Eleven har erfaring fra arbeid med naturlige tall hvor plassholderen står bak sifrene. I arbeid med desimaltall, står plassholderen derimot foran sifrene. Elever kan også svare at 0,4 er større enn 0,6. Disse elever ser komma som en brøkstrek og tenker at $\frac{1}{4}$ er større enn $\frac{1}{6}$.

² Mer om dette finner man under Pakke Misoppfatninger i matematikk

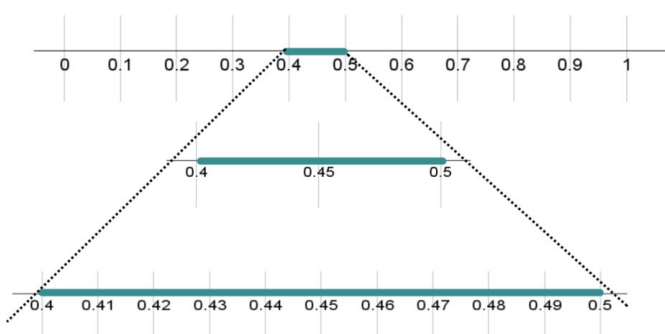
Mange av problemene med forståelse for desimaltall kan falle bort, hvis elevene ser forbindelsen mellom desimaltall og brøk, at et desimaltall er en brøk med nevner 10, 100 ...

Hvordan kan vi arbeide for å skape bedre forståelse?

Når man måler en lengde med en målestav, uansett om det er et metermål eller en hvilken som helst stav, er sannsynligheten stor at det blir en rest. Hvordan skal man måle denne resten? Det finnes to måter å gjøre det på, man kan utvide måleenheten som å gå fra meter til desimeter eller finne ut hvor stor del av måleenheten denne resten utgjør. Begge innfallsvinklene vil kunne øke forståelsen av desimaltall. Hvis man deler inn måleenheten i mindre enheter, oppdager elever at det finnes flere tall mellom to gitte tall. Deler man en meter inn i mindre enheter f. eks desimeter så kan elevene ha utbytte av å få ordet desimaltall forklart. Noen vil da spørre om det finnes en slik forklaring også for centimeter og millimeter.

Hvis man tar utgangspunkt i en vilkårlig lengde vil elevene finne at resten er mer eller mindre enn $\frac{1}{2}$ eller større enn $\frac{2}{3}$. Dette utgangspunktet danner et godt grunnlag for å se sammenhengen mellom brøk og desimaltall.

For å utvikle en god begrepsforståelse for desimaltall er tallinjen et godt hjelpemiddel, da hvert tall har sin plass. En vanlig misforståelse er at det ikke finnes tall mellom 0,4 og 0,5. Med hjelp av digitale hjelpemidler er det lett å vise at det ikke stemmer. Vis en tallinje som man så zoomer mens elevene ser på. Noen vil være overrasket over at stadig nye tall dukker opp.

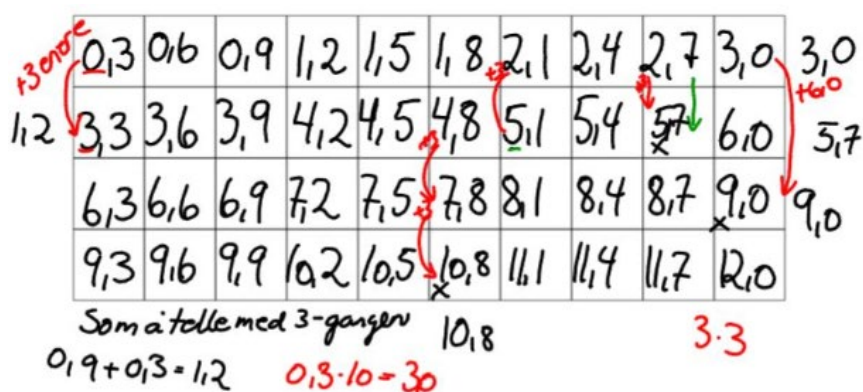


FIGUR 11

En fordel for å sikre forståelsen er at elevene lærer å lese tallene riktig. Det er viktig at elevene leser desimaltallet 0,73 som null – komma – sju tideler – tre hundredeler. Etter hvert kan dette forkortes til null – komma – sju – tre. Man bør unngå å lese null – komma – syttitre.

Da kan elevene gli tilbake til sin misforståelse om to tall, det ene foran komma og det andre etter.

Det er viktig at elevene blir trygge på overgangen mellom tideler og det hele. Aktiviteten «Telle i kor med 0,3»³ kan brukes til å vise sammenhengen mellom tideler og enere i posisjonssystemet. Overgangen fra 0,9 til 1,2 ikke er selvsagt for alle elever. Noen elever vil telle 0,3 - 0,6 - 0,9 - 0,12 - 0,15. Det er viktig å prate om 0,3 og å se sammenhengen med $\frac{3}{10}$. Å telle null – komma – tre, null – komma – seks osv., gir en annen opplevelse enn når man teller tre tideler, seks tideler osv. Dette blir ekstra tydelig i overgangen mellom null – komma – ni og en – komma – to sammenlignet med å lese ni tideler og tolv tideler. En sammenligning av disse måtene å lese tallene på understreker med andre ord sammenhengen mellom brøk og desimaltall. Hvis elevene har forstått at 0,3 er det samme som $\frac{3}{10}$ har de ord for å forklare hva som skjer i tierovergangen. Det viser at et godt etablert brøkbegrep kan lette forståelsen av desimaltall. (Svorkmo, 2016)



FIGUR 12

Dybdelæring handler om å se sammenhenger

Forståelsen av desimaltall vil øke matematikkompetansen på flere måter. Regning med desimaltall blir en utvidelse av regning med naturlige tall. Ved å utføre beregninger med desimaltall vil forståelsen for de fire regneartene og posisjonssystemet utvikle seg. 0 som plassholder er etablert. Det kan føre til at overganger mellom enheter blir til noe mer enn bare «flytte komma noen plasser fram og tilbake». Når elevene har en god forståelse både for brøk og desimaltall vil ikke prosentregning oppfattes som noe nytt. Det blir ikke noe annet enn en utvidelse. At det hele er 100 og ikke 1, vil ikke oppleves som vanskelig. All tid man bruker til å finne sammenhenger mellom brøk og desimaltall vil hjelpe elevene ved

³ For mer informasjon [MAM-prosjektet](#)

overgangen til prosentregning. At elevene arbeider mye med sammenhengen $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$ eller $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$ gir et godt utgangspunkt for videre læring.

For å få en dypere forståelse må man arbeide med sammenhengen mellom begrepene «brøk» og «desimaltall». Et forslag som kan vise om elevene ser sammenhengen mellom desimaltall og brøk kan være at hver elev får utdelt to klisterlapper. På den ene lappen skal de skrive en brøk med verdi mellom 0 og 1, på den andre et desimaltall mellom 0 og 1. Marker 0 og 1 langs en vegg eller på golvet. Elevene skal nå plassere lappene sine på tallinjen. Det kan være lurt å dele klassen i mindre grupper, da det lett blir uoversiktlig med mange lapper på samme tallinje og arbeidsomt når man må flytte på lapper, fordi nye lapper ikke får plass. Legg spesielt merke til desimaltall og brøk som har samme verdi. Hvordan argumenterer elevene i slike tilfeller? Har elevene forstått at $\frac{1}{3}$ og 0,33 ikke har samme verdi. Hjelp dem til å avgjøre hvilket av tallene som er størst. Videre er det like viktig at elevene kan forklare at 7,245 består av 7 hele, 2 tideler, 4 hundredeler og 5 tusendeler som å finne svaret på $5,6 + 3,8 = 9,4$.

Konklusjon

Som lærere må vi være spesielt oppmerksomme når elevene arbeider med begrepsforståelse. Ny og utvidet forståelse kan endre elevenes syn på et matematisk område. En dypere forståelse kan gjøre at man knytter nye mentale bilder til begrepet og man kan assosiere det med anvendelser man ikke har vært oppmerksom på tidligere.

En dypere forståelse kan synliggjøre sammenhenger mellom kunnskap som tidligere har vært fragmentarisk, flere brikker i forståelsen kan falle på plass og danne et mer komplett bilde. Når begrepet først er forstått, er det naturlig at det oppfattes som helt selvfølgelig.

Læreren må huske at det som for han/henne nå oppfattes som helt selvfølgelig, ikke nødvendigvis oppleves slik for elevene. Læreren må også være klar over at arbeid med begreper tar tid. Elevene behøver mange og varierte erfaringer med begreper. De trenger å bruke ulike representasjoner og å se sammenhengen mellom dem.

Referanser

Tokle, O. D., Bondø, A. & Åsenhus, R. (2018). *Misoppfatninger knyttet til brøk*. Lastet ned fra <http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-08/Tokle%2C%20Bond%C3%B8%2C%20%C3%85senhus%20-%20Misoppfatninger%20knyttet%20til%20br%C3%B8k.pdf>

Tokle, O. D., Bondø, A. & Åsenhus, R. (2018). *Misoppfatninger knyttet til tall*. Lastet ned fra <http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/Tokle%2C%20Bond%C3%B8%2C%20A%CC%8Asenhus%20-%20Misoppfatninger%20knyttet%20til%20tall.pdf>

Pettersson, K., Brandell G. (2017) *Å utvikle elevers begrepsforståelse*. Lastet ned fra https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/1-matematik/Gymnasieskola/446-hogkoleforberedandematematikundervisning%20GY/3_attutvecklaeleversbegreppsformaga/Material/Flik/Del_03_MomentA/Artiklar/HFBGy_03A_01_attutvecklaeleversbegreppsformaga.docx

Svorkmo, M. (2016). *Telle i kor*. Lastet ned fra <https://www.matematikkenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Svorkmo.%20Telle%20i%20kor.pdf> 11.09.2018