



Å planlegge og lede en målrettet matematisk samtale

AUGUST 2019



Kjersti Wæge og Svein H. Torkildsen
NTNU

Innholdsfortegnelse

MÅLRETTET MATEMATISK SAMTALE	3
FEM PRAKSISER FOR Å LEDE MÅLRETTEDE MATEMATISKE SAMTALER.....	3
FORVENTE	4
OBSERVERE	7
VELGE	7
BESTEMME REKKEFØLGEN	8
SE SAMMENHENGER	9
OPPSUMMERING OG KONKLUSJON.....	11
REFERANSER	11

Målrettet matematisk samtale

Matematiske samtaler og diskusjoner har stor betydning for elevenes utvikling av dybdelæring og forståelse i matematikk (Carpenter, Franke, & Levi, 2003). Å legge til rette for produktive matematiske diskusjoner samtidig som en leder elevene mot målet for timen er kjernen i god matematikkundervisning, og det er kanskje det mest utfordrende aspektet ved lærerens undervisning (Jansen, 2006; Lampert, Beasley, Ghouseini, Kazemi, & Franke, 2010).

En målrettet diskusjon tar utgangspunkt i tydelig formulerte læringsmål. Det kan for eksempel være å forstå sentrale matematiske ideer, å sammenligne forskjellige strategier eller å forstå hvorfor en strategi eller metode virker. Lærerens oppgave blir å lede elevene mot målet for timen, ved å ta utgangspunkt i og bygge på elevenes bidrag (Lampert et al., 2010; Leinhardt & Steele, 2005; Nathan & Knuth, 2003). Noen ganger er det hensiktsmessig at læreren presenterer læringsmålet for elevene i starten av timen, mens andre ganger kan det være hensiktsmessig at læreren ikke gjør det. Det aller viktigste er at elevene vet hva hensikten med aktiviteten er (Wæge & Nosrati, 2018).

Våre erfaringer gjennom samarbeid med lærere, viser at helklassesdiskusjoner ofte består av separate presentasjoner av forskjellige måter å løse oppgaven på. Elevene presenterer strategiene sine og de forklarer hvordan de tenker, og så stopper det der. Lærerne forteller at de synes det er utfordrende å gå videre derfra, og de er usikre på hvordan de kan bruke de forskjellige elevbidragene til å nå målet for timen. I denne artikkelen presenterer vi fem praksiser som kan hjelpe læreren i dette arbeidet.

Fem praksiser for å lede målrettede matematiske samtaler

Denne artikkelen tar utgangspunkt i Smith og Stein og deres kolleger sitt arbeid knyttet til matematiske diskusjoner (Smith & Stein, 2011; Stein et al., 2008). De har identifisert fem praksiser som kan hjelpe læreren med å planlegge og lede målrettede matematiske samtaler som tar utgangspunkt i elevenes tenking:

1. **forvente** hvilke strategier elevene vil bruke når de løser utfordrende matematikkoppgaver
2. **observere** elevenes respons på oppgaven (mens elevene arbeider med oppgaven i par eller små grupper)
3. **velge** bestemte elever som skal presentere strategiene sine i helklassesdiskusjonen

4. **bestemme rekkefølgen** til elevstrategiene som skal presenteres på tavla
5. **se sammenhenger** mellom forskjellige elevstrategier og mellom elevstrategier og sentrale matematiske ideer (oversatt og tilpasset fra Smith & Stein, 2011, s. 8; Wæge, 2019).

De fem praksisene kan hjelpe læreren med å få bedre kontroll over diskusjonene og redusere graden av improvisasjon.

Det finnes også en «nullte» praksis som kommer før de fem praksisene som er beskrevet over, og den handler om å formulere tydelige, spesifikke læringsmål for timen (Hiebert, Morris, Berk, & Jansen, 2007). Læreren må vite hvor hun skal lede elevene, slik at hun vet hvilke strategier og matematiske ideer hun vil vektlegge i diskusjonen. Det vil være helt avgjørende for å lykkes med å lede en målrettet matematisk diskusjon. Det kan ofte være utfordrende for læreren å formulere læringsmål for timen, og som hjelp i dette arbeidet kan læreren tenke over hvilke matematiske begreper og ideer hun har som mål at elevene skal lære, hvorfor de er viktige og hvordan de henger sammen med elevenes forkunnskaper og det de har arbeidet med tidligere (NCTM, 2014). Etter at læreren har formulert læringsmålene for timen, må hun finne en egnet aktivitet som kan fremme problemløsning og resonnering. Hun kan for eksempel velge en LIST-oppgave¹. LIST-oppgaver er oppgaver som har **Lav Inngangsterskel** – slik at alle elever kan få til noe – og **Stor Takhøyde** – slik at alle elevene kan få utfordringer (Wæge & Nosrati, 2018).

Forvente

Den første praksisen handler om å se for seg hvilke strategier elevene vil bruke for å løse oppgaven (Smith & Stein, 2011). Læreren må forsøke å løse oppgaven på mange forskjellige måter (Wæge, 2019). Hun må både finne mulige elevstrategier som gir riktig svar og også tenke over mulige feilsvar eller misoppfatninger som elevene kan komme med. Det kan være en god ide å samarbeide med eller snakke med andre lærere i dette arbeidet. Læreren må hele tiden vurdere hvordan de forventede elevstrategiene kan knyttes til læringsmålene og de matematiske begrepene og ideene han ønsker at elevene skal lære.

For å illustrere hvordan læreren kan bruke de fem praksisene, vil vi vise et eksempel². Marie er lærer for 7. trinn, og hun bruker de fem praksisene for å fremheve viktige matematiske ideer og lede elevene mot læringsmålet for timen. Marie ønsker at elevene skal lære mer om

¹ Du finner mange LIST-oppgaver på www.mattelist.no

² Eksemplet bygger på datamaterialet fra MAM-prosjektet (Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning) (Du kan lese om prosjektet på www.matematikkenteret.no)

problemløsningsstrategiene *Prøve og feile* og *Lage en tabell*³. Oppgaven elevene skal arbeide med er *Bestefars tiere*. Marie vil vektlegge de to generelle problemløsningsstrategiene, og i tillegg ønsker hun å fremheve at det å se på sammenhengen mellom 3-gangen og 7-gangen kan være en god strategi for å løse oppgaven, og for å begrunne antallet løsninger til oppgaven.

Bestefars tiere

Bestefar har spart slik at han har 65 tiere.

Han vil gi penger til barnebarna sine.

De små skal få 3 tiere hver og de store skal få 7 tiere hver.

Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha, var det ingen tiere igjen!

Hvor mange barnebarn kan bestefar ha?



Marie fører inn de forskjellige strategiene hun forventer at elevene vil bruke i et undervisningsnotat (se Figur 1). Dette notatet hjelper henne med å strukturere den matematiske samtalen. Marie noterer også spørsmål hun kan stille for få frem elevenes tenking og for å støtte elever og hjelpe dem videre i arbeidet:

- Kan du bruke brikkene for å løse oppgaven?
- Kan du ta utgangspunkt i grupperingen du har gjort, og bruke det til å finne en løsning?
- Er dette den eneste løsningen? Finnes det flere løsninger?
- Kan du ta utgangspunkt i løsningen du har funnet for å se om du kan finne flere løsninger?
- Kan du skrive det du har funnet som et regnestykke?

³ Du kan lese om problemløsningsstrategier i Torkildsen (2017)

Undervisningsnotat: Bestefars tiere		
Mål Lære mer om problemløsningsstrategiene <i>Prøve og feile</i> og <i>Lage en tabell</i> . Se at det å bruke sammenhengen mellom 3-gangen og 7-gangen kan være en god strategi for å løse oppgaven.		
Oppgave <i>Bestefars tiere</i>	Utstyr Oppgaveark Tellebrikker	
Oppstart av timen – Hvordan presentere problemet og organisere arbeidet? Jeg leser oppgaven for elevene og har en dialog med elevene for å være sikre på at de har forstått oppgaven. Jeg deler ut oppgavearket og tellebrikker som elevene kan bruke hvis de vil. Elevene arbeider i grupper på to		
Hvordan kan elevene løse problemet	Hvem løste det på denne måten?	Hvilke skal fremheves og i hvilken rekkefølge?
<i>Prøve og feile brikker: usystematisk</i>		
<i>Prøve og feile med brikker: Starter med grupper av 3</i>		
<i>Prøve og feile med brikker: Starter med grupper av 7</i>	<i>Susanne og Tone</i>	Ja, som nr. 1
<i>Prøve og feile med brikker: Starter med like mange av hver gruppe (3-ere og 7-ere) eller med grupper av 10</i>	<i>Truls og Tom</i>	Ja, som nr. 2
<i>Prøve og feile med brikker. Starter med grupper av 3 eller grupper av 7 og finner en løsning. Bruker deretter sammenhengen mellom 3- og 7-gangen for å finne resten av svarene</i>	<i>Olav og Marte</i>	Ja, som nr. 4
<i>Bruke gangetabellen. Systematisk eller usystematisk. Noen vil starte med 10 og 5</i>		
<i>Bruke gangetabellen og lage tabell</i>	<i>Lise og Anne</i>	Ja, som nr. 3
<i>Bruke 3-gangen og 7-gangen og sammenhengen mellom dem</i>		
<i>Bruke 7-gangen systematisk. Starter med 7 ganger 10 og regner seg nedover</i>		
Andre strategier som dukket opp		
<i>Bruke gangetabellen og lage tabell. Ser på ener plassene og om summen har fem på enerplassen</i>		
Planlagt retning for diskusjon og avslutning av timen	Vise eksempler hvor elevene har brukt strategien <i>Prøve og feile</i> på en systematisk måte. Vise et eksempel hvor elevene har brukt strategien <i>Lage tabell</i> . Vise et eksempel på hvordan man kan bruke sammenhengen mellom 3-gangen og 7-gangen til å finne de tre løsningene og begrunne at det ikke finnes flere enn disse løsningene.	

FIGUR 1: UNDERVISNINGSNOTAT FOR PROBLEMLØSNINGSOPPGAVER (WWW.MATEMATIKKSENTERET.NO)

I tillegg noterer Marie spørsmål hun kan stille til elever som trenger ekstra utfordringer:

- Kan du begrunne hvorfor det finnes akkurat tre løsninger?
- Kan du finne flere måter å løse oppgaven på?
- Kan du se om det er noen sammenhenger mellom de forskjellige måtene å løse oppgaven på?
- *Hva hvis* barnebarna får enten 3, 6 eller 7 tiere, hvor mange barnebarn kan bestefar da ha?
- Kan du sette inn nye tall i oppgaven slik at det blir bare en løsning, to løsninger, fire løsninger, ingen løsninger?

Marie tenker også gjennom spørsmål som hun kan bruke for å lede elevene mot målet for timen og som kan hjelpe dem til å se sammenhenger mellom ulike strategier.

Observere

Denne praksisen handler om å observere hvordan elevene tenker og hvilke strategier de bruker for å løse oppgaven (Smith & Stein, 2011). Når læreren observerer gjør han mer enn å bare gå rundt og høre på elevene. Hun stiller spørsmål som bidrar til å synliggjøre elevenes tenking, og hun kan stille spørsmål som hjelper elevene videre i arbeidet og gi ekstra støtte eller utfordringer til elever som trenger det.

Marie bruker undervisningsnotatet til å holde oversikten over hva elevene gjør. Hun noterer navnet på noen av elevene som har brukt strategiene hun forventet (figur 1). Susanne og Tone bruker brikker for å løse oppgaven, og de forteller at det er 2 store barnebarn og 17 små barnebarn. Marie spør dem hvordan de tenkte da de løste oppgaven. Susanne og Tone forteller at de startet med å lage grupper på 3. De fikk 21 grupper på 3, men da ble det 2 brikker til overs. De bestemte seg derfor for å bruke noen av gruppene på 3 og de 2 brikkene de fikk til overs til å lage grupper på 7. Og da gikk det opp. De fikk 2 grupper på 7, dvs. 2 store barnebarn og 17 grupper på 3, dvs. 17 små barnebarn.



FIGUR 2: ELEVENE STARTER MED Å LAGE GRUPPER PÅ 3.

Velge

Å velge handler om å bestemme hvilke elevbidrag (hva) som skal vektlegges i diskusjonen og hvilke elever (hvem) læreren vil spørre. Dette vil ha betydning for hva som blir vektlagt i diskusjonen og dermed hvilke matematiske ideer som blir gjenstand for undersøkelse.

Læreren kan altså vektlegge bestemte strategier for å styre diskusjonen mot målet for timen. I en målrettet diskusjon er det tilstrekkelig at noen av elevene presenterer sin løsning. Ved å høre om og prøve å forstå andre elevers strategier og måter å tenke på, og se det i

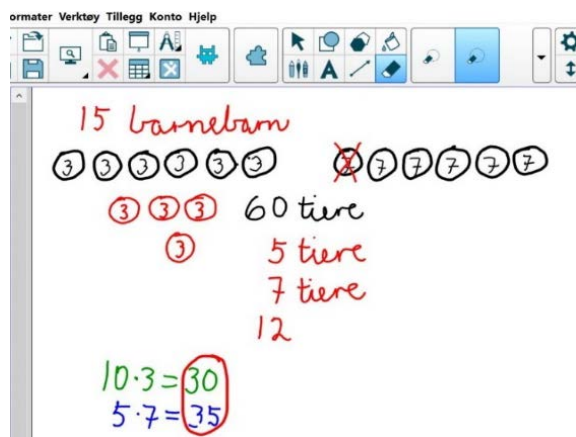
sammenheng med egne strategier eller løsninger, kan elevene videreutvikle sine egne strategier.

Marie bestemte under planleggingen av timen hvilke strategier hun ønsker å fokusere på i diskusjonen (se figur 1). Mens hun går rundt og observerer, spør hun to elever, Olav og Marte, om de kan bidra i helklassesdiskusjonen med å forklare hvorfor deres strategi gir riktig svar. De hadde startet med å lage grupper av 7 for å finne en løsning. Deretter brukte de sammenhengen mellom 3- og 7-gangen for å finne flere løsninger. Dette er en av strategiene Marie ønsker å vektlegge i diskusjonen.

Bestemme rekkefølgen

Læreren kan også bestemme (ofte på forhånd) hvilken rekkefølge de forskjellige strategiene skal presenteres i. Det er viktig at læreren forsøker å velge en rekkefølge som kan bidra til at flest mulig elever kan følge med og få tilgang til – og dermed forstå - de sentrale matematiske ideene som er i fokus (Smith & Stein, 2011). Noen ganger bestemmer læreren at den strategien som de fleste elevene har brukt skal presenteres først. Andre ganger bestemmer hun at en bestemt strategi som kan lede elevene mot målet for timen skal presenteres først. Læreren kan også velge å starte med et typisk feilsvar eller en misoppfatning, for å kunne oppklare hva feilen eller misoppfatningen består i, slik at elevene kan endre tenkingen sin og utvikle mer hensiktsmessige strategier.

Marie hadde på forhånd bestemt hvilken rekkefølge hun ønsket å presentere de ønskede strategiene i (se figur 1). Hun hadde planlagt å starte med et par av strategiene hun trodde mange av elevene ville bruke og som de fleste elevene ville kunne forstå. Antagelsen hennes viser seg å stemme, så hun bestemmer seg for å følge planen. Strategien hun velger å starte med er *Prøve og feile* ved hjelp av brikker, der elevene starter med like mange av hver gruppe (se figur 3). Marie vil deretter få frem problemløsningsstrategien å bruke tabell (se figur 4), før hun vil vektlegge strategier som bruker sammenhengen mellom 3- og 7-gangen for å begrunne hvorfor oppgaven har tre løsninger.



FIGUR 3: LÆREREN SKRIVER DET ELEVENE SIER PÅ TAVLA.

Ei gruppe elever laget en systematisk tabell med utgangspunkt i at det ikke kunne være mer enn 9 store barnebarn. 9 store barnebarn skal ha 63 tiere. Da er det 2 tiere igjen, så det går ikke opp. Men med 8 store barnebarn blir det 9 tiere igjen, og de kan fordeles på 3 små barnebarn. Deretter fylte de ut resten av tabellen og fant alle mulige løsninger.

Barnebarn Store	Tiere		Barnebarn Små
	Antall	Rest	
9	63	2	X
8	56	9	3
7	49	16	X
6	42	23	X
5	35	30	10
4	28	37	X
3	21	44	X
2	14	51	17

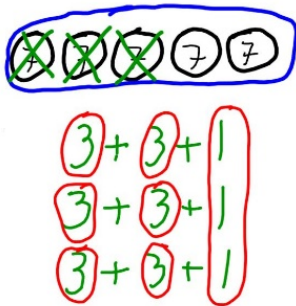
FIGUR 4: TABELL SOM VISER EN SYSTEMATISK UTFORSKING

Se sammenhenger

Den siste praksisen handler om å bruke elevenes strategier og ideer til å lede elevene mot målet for timen. Læreren kan hjelpe elevene med å se sammenhenger mellom egne og andre sine strategier og til å se strategiene i sammenheng med sentrale matematiske begreper og ideer. Læreren kan også sette i gang diskusjoner om hvor effektive de ulike strategiene er i denne spesifikke situasjonen, i hvilke situasjoner strategiene kan brukes og om strategiene kan utvides eller generaliseres (Hva hvis ...?) (Smith & Stein, 2011).

Marie har fått elevene til å presentere problemløsningsstrategiene *Prøve og feile* og *Lage en tabell*. Hun vil i tillegg fremheve det siste målet for timen, nemlig hvordan en kan bruke sammenhengen mellom 3- og 7-gangen for å finne løsningene og begrunne hvorfor det er tre

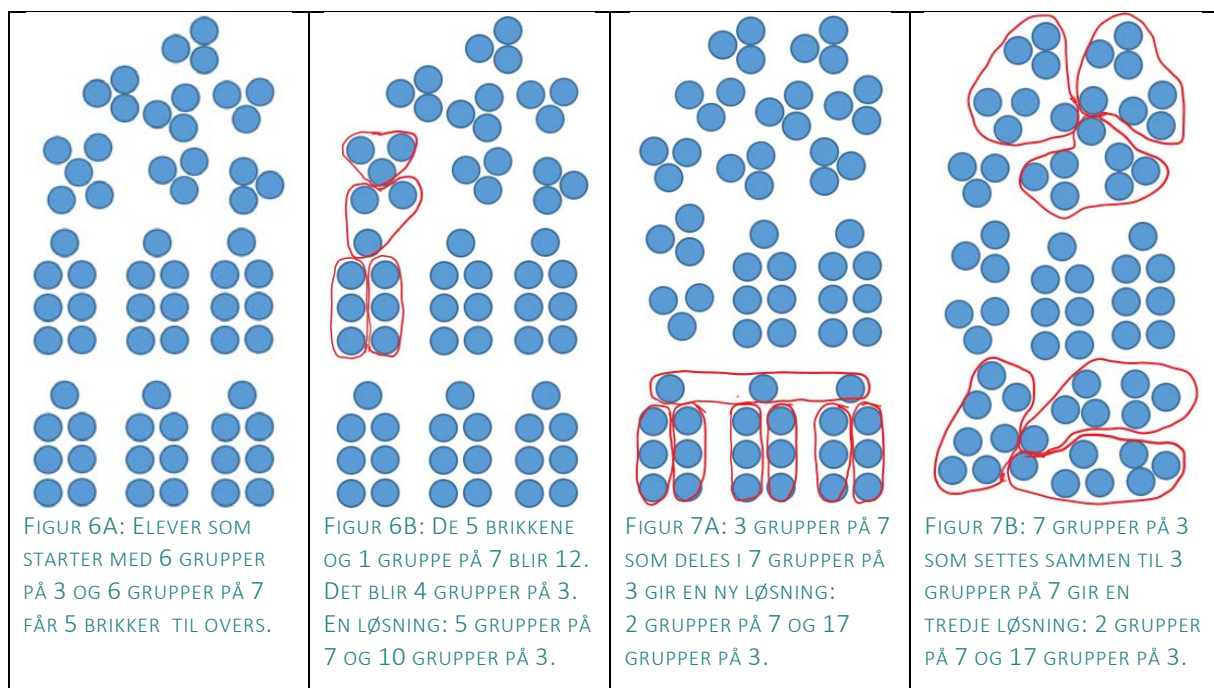
løsninger på problemet. Hun ber Olav og Marte, som har brukt denne strategien med brikkene, til å forklare hvordan de har tenkt. De forteller: Vi tok 3 grupper på 7 og delte hver av de i 2 grupper på 3 og 1 til overs. Så ble de 3 enerne også ei gruppe på 3. Da hadde vi 7 grupper på 3. Og så tok vi 7 grupper på 3 og laget 3 grupper på 7. Da hadde vi tre forskjellige løsninger.



FIGUR 5: LÆREREN SKRIVER DET ELEVENE FORKLARER.

Figurene 6A og 6B viser prosessen med prøving og feiling ved hjelp av brikker.

Figurene 7A og 7B viser ved hjelp av brikker hvordan Olav og Marte har tenkt.



Til slutt har de en kort felles oppsummering hvor de løfter frem det de har lært i timen. Marie fremhever problemløsningsstrategiene hun ønsker å vektlegge, og de snakker mer generelt om hva en problemløsningsstrategi er, hvorfor en bør lære ulike strategier og hvordan en kan bruke ulike problemløsningsstrategier i ulike situasjoner.

Oppsummering og konklusjon

Å legge til rette for produktive matematiske samtaler, samtidig som en leder elevene mot målet for timen, er et krevende arbeid (Jansen, 2006; Sherin, 2002). Ved å ta hensyn til og arbeide med de fem praksisene *forvente, observere, velge, bestemme rekkefølgen* og *se sammenhenger*, kan læreren ha større kontroll over det som skjer i timene og i større grad lykkes med å bruke elevenes bidrag til å lede dem mot læringsmålet for timen. Matematiske diskusjoner kan bidra til dybdelæring og forståelse i matematikk. Ved å delta i matematiske samtaler, kan elevene lære å formulere og begrunne strategiene sine og de kan lære å resonnerer ved hjelp av egne og andre elevers forklaringer og se sammenhenger mellom ulike strategier (Carpenter, Franke, & Levi, 2003).

Referanser

- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School*. Portsmouth: Heinemann.
- Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58(1), 47-61.
- Jansen, A. (2006). Seventh graders' motivations for participating in two discussion-oriented mathematics classrooms. *The Elementary School Journal*, 106(5), 409–428.
- Lampert, M., Beasley, H., Ghouseini, H., Kazemi, E., & Franke, M. L. (2010). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. In M. K. Stein, & L. Kucan (Eds.), *Instructional Explanations in the Disciplines* (pp. 129–141). New York, NY: Springer.
- Leinhardt, G., & Steele, M. D. (2005). Seeing the complexity of standing to the side: Instructional dialogues. *Cognition and Instruction*, 23(1), 87-163.
- Nathan, M. J., & Knuth, E. J. (2003). A study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction*, 21(2), 175-207.
- NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions. Ensuring Mathematical Success for All*: NCTM.
- Sherin, M. (2002). A Balancing Act: Developing a Discourse Community in a Mathematics Classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), 205-233.
doi:10.1023/A:1020134209073
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical thinking and learning*, 10, 313-340.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Oslo: Universitetsforlaget.

Wæge, K. (2019). Samtaler i matematikk. In E. Klaveness, L. Karlsen, & K. Kverndokken (Eds.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk* (pp. 19-37). Oslo: Fagbokforlaget.