Problemområder knyttet til brøk

17.04.18

Astrid Bondø og Olav Dalsegg Tokle
MATEMATIKKSENTERET, NTNU

Innholdsfortegnelse

Innledning

En av vanskelighetene med brøk er at begrepet kan ha mange betydninger, og elevene møter alle disse ulike betydningene i dagliglivet. Elevene kjenner til uttrykk som ”halvparten", ”en tredel” og ”et kvarter” før de begynner på skolen, men det er ikke sikkert de har noen forståelse for innholdet i uttrykkene.

Elevenes vanskeligheter med brøk kan knyttes til ulike problemområder

- generalisering av heltallstenking
- ulike aspekter ved brøk
- ulike representasjoner (brøknotasjon, desimaltall og prosent)
- fokus på regler og algoritmer framfor begrepsforståelse.

Generalisering av heltallstenking

Heltallstenking innebærer at elevene generaliserer det de har lært om heltall og regning med hele tall til å gjelde brøk og brøkregning. Elevene vil erfare at det fungerer i noen tilfeller, men i de fleste situasjoner vil det ikke fungere. Eksempel: Elevene tenker at jo større nevneren er, jo større er tallet. Argumentasjonen stemmer når de sammenligner $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{4}$, men ikke $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{5}$.

Ulike aspekter ved brøk

Elevene må bli fortrolige med de ulike aspektene ved brøk. Brøk kan være en del av en helhet, en måltall (tallstørrelse), en faktor som forstørrer eller forminsker en størrelse (operator), svaret på en divisjonsoppgave (kvotient) eller en måte å sammenligne to størrelser på (forhold). Tabell 1 viser en oversikt over de ulike aspektene ved brøk, og eksempler på hvordan konteksten påvirker tolkningen av brøken $\frac{3}{4}$ (Lamon, 2012).

TABELL 1 KORT OVERSIKT OVER DE ULIKE ASPEKTENE VED BRØK

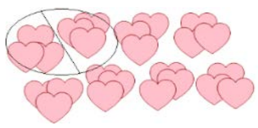
Aspekter ved brøk	Kontekst
Del av en helhet Antall deler sammenlignet med antall deler i helheten.	De trengte $\frac{3}{4}$ av flaskene i en kasse brus. De spiste $\frac{3}{4}$ av kaken.
Måltall (tallstørrelse) Sammenligner deler av helhet (lengde, beløp, areal o.l.) med helheten. Brøken relateres til en måleenhet. Brøk kan også være et tall som kan relateres til andre tall.	I en oppskrift står det $\frac{3}{4}$ kopp sukker. Camilla sprang $\frac{3}{4}$ mil. Tallet $\frac{3}{4}$ er større enn $\frac{1}{2}$ og mindre enn 1.
Kvotient Brøken er svaret i en divisjon, der to heltall divideres.	3 kaker deles på 4 personer, hver person får $\frac{3}{4}$ kake.
Operator Brøken virker på en størrelse, slik at denne størrelsen blir mindre eller større. Disse situasjonene er alltid multiplikative.	Bruk $\frac{3}{4}$ av 1 kg kjøttdeig. Siri spiste $\frac{3}{4}$ av to pizzaer.
Forhold Sammenligner to (eller flere) deler med hverandre (del-del), eller sammenligner delene med helheten (del-hel).	3 jenter og 4 gutter i gruppen (del-del) 3 jenter av 4 elever i gruppen (del-hel)

Del av en helhet

Brøk kan være del av en helhet (del-hel). Helheten kan være hva som helst: en kake, et areal, en gruppe barn, en dropspose, en pris osv. Helheten deles i like store deler, der en av delene kan beskrives som en stambrøk (brøk med teller 1). Eksempel: Dersom 24 drops blir delt i fire poser, vil hver pose inneholde en firedel ($\frac{1}{4}$) av dropsene, figur 1. Dropsene fra flere poser kan legges i en større pose og utgjør da en ny brøk. Tre dropsposer utgjør tre firedeler av alle dropsene ($\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$), figur 2. Dropsene kan også fordeles i flere poser. Dersom en firedel av dropsene blir fordelt i to poser, utgjør de to posene til sammen to åttedeler av alle dropsene, figur 4. Vi sier at brøken blir utvidet, som betyr at $\frac{1}{4}$ og $\frac{2}{8}$ av alle dropsene er like mye, de to brøkene er likeverdige. Vi kan skrive $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$. Dette kan by på problemer for mange elever. $\frac{2}{8}$ kan oppfattes som 2 av 8, mens $\frac{1}{4}$ oppfattes som 1 av 4. I praksis kan dette være helt ulike situasjoner, mens på tallinja vil de to uttrykkene stå på samme plass.

FIGUR 1 EN POSE UTGJØR EN FIREDEL AV DROPSENE

FIGUR 2 TRE POSER UTGJØR TRE FIREDELER AV DROPSENE

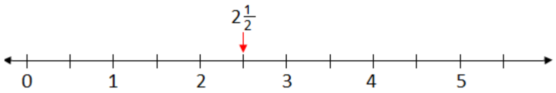


FIGUR 3 EN FIREDEL AV DROPSENE ER DET SAMME SOM TO ÅTTEDELER

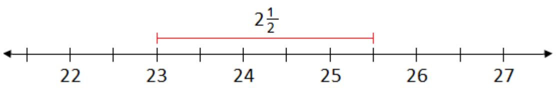
Måltall (tallstørrelse)

Brøk kan uttrykke en tallstørrelse når tallområdet utvides utover de hele tallene.
Eksempel: $2\frac{1}{2}$ er et tall mellom 2 og 3 og kan representeres som et punkt på en tallinje, se figur 4. I denne sammenhengen har ikke brøken en relasjon til en helhet og kan derfor ikke forstås som et relativt begrep. Men man kan si at en brøk er større eller mindre enn en

annen brøk, og elevene møter ofte oppgaver der brøker skal sorteres i stigende rekkefølge. Dersom brøk blir brukt som et måltall, relateres den til en måleenhet i form av en lengde på ei tallinje eller som en fysisk størrelse (volum, lengde, areal), se figur 5.



Figur 4 Eksempel på brøk som størrelse: Et punkt på ei tallinje



Figur 5 Eksempel på brøk som måltall: En lengde på ei tallinje

Måleenheten kan være standardisert (meter eller desiliter) eller ustandardisert ($3\,\frac{1}{4}$ skritt eller $\frac{1}{2}$ glass). Eksempel: I en oppskrift står det at du trenger $1\,\frac{1}{2}$ liter melk for å lage risengrynsgrøt til 6 personer, se figur 6. I dette eksemplet relateres brøken til måleenheten *liter* i stedet for en gitt *mengde* (helhet). Måltallet er $1\,\frac{1}{2}$, og måleenheten er liter. Utvidelsen av tallområdet kommer godt fram når vi arbeider med brøk som måltall, fordi måleenheten kan deles opp (i like store deler) slik at målingen blir mer nøyaktig (L – dL – cL – mL).


Risengrynsgrøt

Ingredienser

PORSJONER 6

- 3 dL grøtris
- 6 dL vann
- 1 ½ ts salt
- 1 ½ L melk

Figur 6 Eksempel på brøk som måltall

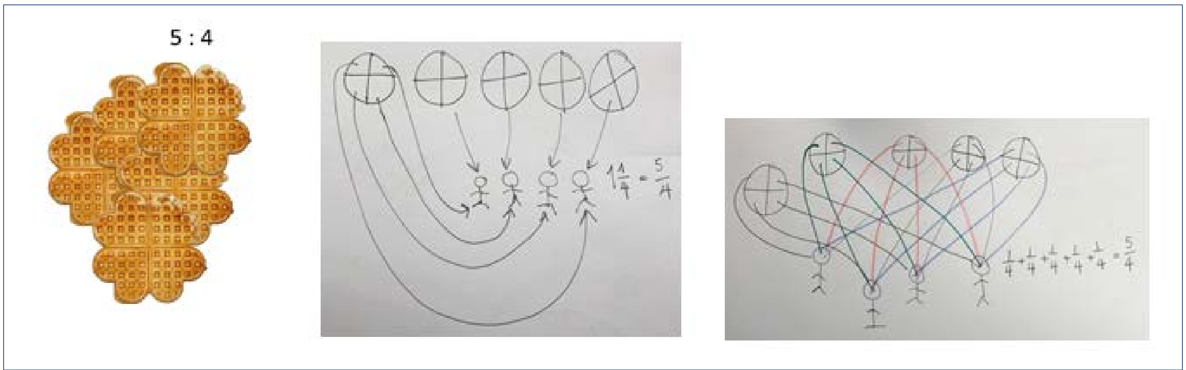
For å kunne avgjøre størrelsen til en brøk er det noen momenter i elevenes begrepsforståelse som må være på plass. Elevene må forstå at

- nevneren viser antall deler helheten er delt i
- jo større nevneren er, jo mindre er brøkdelene (jo flere deler helheten er delt i, jo mindre blir hver del)
- alle delene må ha samme størrelse (ikke nødvendigvis samme form eller utseende)
- telleren forteller hvor mange av delene som er med.

Kvotient

Aspektet brøk som kvotient er en fin inngang til arbeidet med brøk, fordi elevene har mange erfaringer med å dele likt. Brøk som kvotient får vi når en størrelse skal deles i like deler, altså svaret i en divisjon. Nevneren (divisor) forteller hvor mange like deler helheten er delt inn i. Like deler av et areal betyr lik størrelse, like deler av en mengde betyr like mange elementer, like deler av en lengde betyr like lange deler (samme distanse).

Eksempel: Dersom vi skal dele fem vaffelplater likt på fire barn, får hvert barn $\frac{5}{4}$ (eller $1\,\frac{1}{4}$) vaffelplate, figur 7. Dette er en delingsdivisjon, der svaret (kvotienten) er $\frac{5}{4}$.

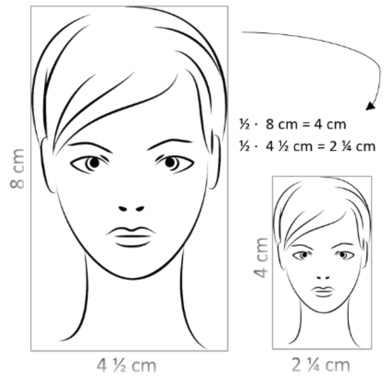


FIGUR 7 EKSEMPEL PÅ BRØK SOM KVOTIENT

Operator

Brøk som operator innebærer en sammenligning mellom to størrelser, der den ene størrelsen er en brøkdel av den andre. Brøken er da et tall som multipliseres med et annet tall. Brøken avgjør om den ene størrelsen blir større eller mindre enn den andre. I alle sammenhenger hvor brøk opptrer som operator, er det snakk om multiplikative strukturer.

Eksempel 1: Line skal forminske et bilde, slik at sidelengdene til bildet blir halvert. Brøk som operator forteller hvilken virkning brøken har på helheten, og i eksemplet med Line vil det bety at brøken $\frac{1}{2}$ tilsvarer en halvering av sidelengdene til det opprinnelige bildet, figur 8. Når brøken (operatoren) uttrykker forholdet mellom to størrelser kalles den en *forholdsoperator* eller *forholdstall* (se Forhold).



FIGUR 8 EKSEMPEL PÅ BRØK SOM OPERATOR

Eksempel 2: Tore fant ut at $\frac{3}{5}$ av 125 gutter ved skolen spilte dataspill mer enn en time per dag. Brøken $\frac{3}{5}$ forteller hvor stor del av guttene dette gjelder. Ved å multiplisere brøken med antallet gutter, finner vi ut at det utgjorde 75 av guttene.

Forhold

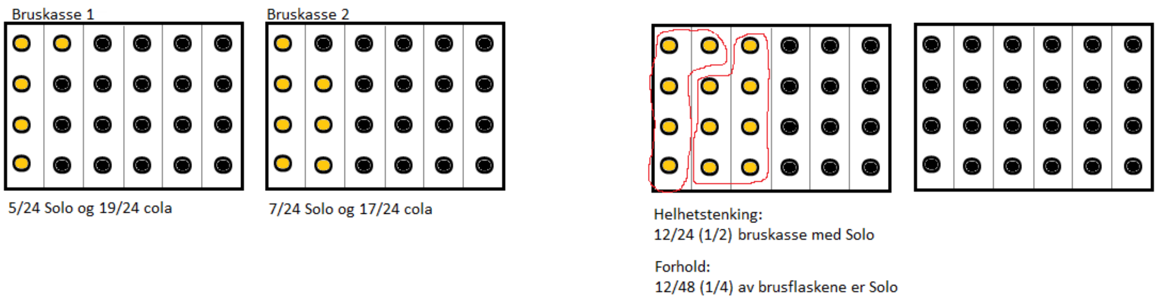
Brøk som forhold betyr at brøken refererer til forholdet mellom to størrelser. En sammenligning mellom to størrelser av samme type kan være en situasjon der en del av en størrelse sammenlignes med helheten (*del-hel*), eller en del av størrelsen sammenlignes med en annen del (*del-del*).

Eksempel: Erik har en kasse brus med 5 flasker solo og 19 flasker cola. Forholdet mellom solo og cola uttrykkes gjerne som 5 : 19 (*del-del*). Dersom vi sammenligner antall soloflasker med innholdet i hele kassen, blir forholdet $\frac{5}{24}$ (*del-hel*), og antall colaflasker sammenlignet med hele kassen blir $\frac{19}{24}$ (*del-hel*), figur 9.

Del-hel-tenkingen finner vi også i aspektet brøk som del av en helhet. Selv om aspektene *del av en helhet* og *forhold* er relatert til hverandre, er det en vesentlig forskjell med tanke på addisjon. Vi tar utgangspunkt i eksemplet med Erik og tenker oss at han kjøper enda en kasse brus. Denne kassen inneholder 7 flasker Solo og 17 flasker cola.

Ved en helhetstenking ser vi på hvor stor del soloflaskene utgjør av én kasse brus. Soloflaskene utgjør $\frac{5}{24}$ av den ene kassen og $\frac{7}{24}$ av den andre kassen. Alle soloflaskene til

sammen utgjør $\frac{12}{24}$ av én kasse ($\frac{1}{2}$ kasse), se figur 9. Vi skriver addisjonen: $\frac{5}{24} + \frac{7}{24} = \frac{12}{24}$.
Dersom vi tolker oppgaven som forhold, ser vi hvor stor del de 12 soloflaskene utgjør av alle flaskene i de to kassene (12 av 48). Vi summerer soloflaskene fra begge kassene, og ser de i forhold til alle flaskene i begge kassene. I dette tilfelle kan vi ikke skrive det som en addisjon fordi de to bruskassene utgjør hver sin helhet, som er noe annet enn de to bruskassene som én helhet.



FIGUR 9 EKSEMPEL PÅ BRØK SOM FORHOLD, DEL-DEL OG DEL-HEL

Et annet eksempel på brøk som forhold er blanding av saft. Det kan være en utfordring å finne ut hvor mye vann som skal til for å lage en liter saftblanding, selv når blandingsforholdet står på saftflasken. På noen flasker står forholdet oppgitt som addisjon, og på andre flasker er forholdet oppgitt som brøk. Eksempel: Blandingsforholdet er 1 + 4, som betyr 1 del saft + 4 deler vann (som gir 5 deler saftblanding), figur 10. Forholdet kan også uttrykkes som 1 : 4. Brøken $\frac{1}{4}$ uttrykker en sammenligning av saft og vann (del-del), mens brøken $\frac{1}{5}$ sammenligner saft og ferdig saftblanding (*del-hel*). Elevene må gjenkjenne situasjon og velge riktig brøk for å finne ut at de trenger $\frac{1}{5}$ liter (2 dL) saft til en liter saftblanding.

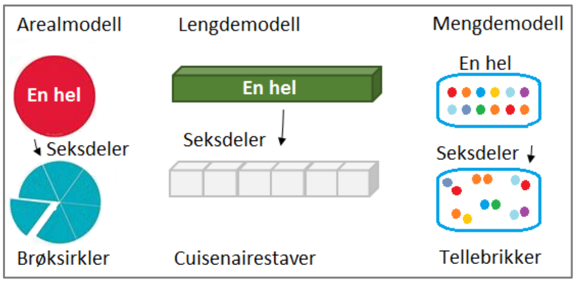
FIGUR 10 EKSEMPEL PÅ BRØK SOM FORHOLD, DEL-DEL

Forholdsregning kan også utvides til forhold mellom flere størrelser. Eksempel: Forholdet mellom lengden, bredden og høyden til en eske er 1 : 1 : 3. Vi vet da at høyden er tre ganger så lang som lengden og bredden og at grunnflaten er kvadratisk.

Ulike representasjoner

Brøk kan representeres på ulike måter. En halv kan utrykkes og brukes som prosent (50 %), desimaltall (0,5, 0,50, 0,500, osv.) og brøk ($\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{12}{24}$, osv.). Mens heltallene representeres på tallinja med ett tall i hvert punkt, kan flere brøker være uttrykk for det samme punktet på tallinja (likeverdige brøker), i tillegg til desimaltall og prosent.

Brøk blir ofte representert gjennom ulike modeller, der areal-, lengde- og mengdemodeller er de mest brukte, figur 11.



Figur 11 Eksempler på areal-, lengde- og mengdemodeller

I arealmodellen er det snakk om deler med likt areal (ikke nødvendigvis samme form). Pizza og kaker er mye brukt, men det er i tillegg viktig å bruke andre representasjoner, med ulik form og størrelse (papir, rutenett, geobrett osv.).

I lengdemodellen sammenlignes lengder eller avstander i stedet for areal, og vi snakker om brøk som et måltall (eller en størrelse). Papirstrimler, cuisenairestaver, linjaler og tallinjer er eksempler på lengdemodeller. Lengdemodellene er lett å relatere til virkeligheten, fordi brøk ofte inngår i praktiske målesituasjoner.

Mengdemodeller betyr at helheten består av flere elementer, og det er antall elementer i mengden som er det vesentlige (ikke nødvendigvis samme areal eller form). Helheten kan deles opp i delmengder som utgjør deler av helheten (del-hel), og delene kan sees i forhold til hverandre (del-del).

Likeverdige brøker

En av de store ideene innen brøk, er at samme tall kan deles opp og uttrykkes på ulike måter. Eksempel: $\frac{1}{2}$ kan utrykkes som $\frac{2}{4}, \frac{15}{30}, \frac{32}{64}, \frac{1002}{2004}$, og uendelig mange flere måter. Brøkene i eksemplet er likeverdige fordi brøken $\frac{1}{2}$ er multiplisert med identitetselementet 1, i form av brøkene $\frac{2}{2}, \frac{15}{15}, \frac{32}{32}$ og $\frac{1002}{1002}$. Å multiplisere eller dividere tall med identitetselementet (nøytralt element), medfører at verdien til tallene ikke endrer seg.

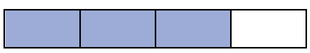
Forståelse av likeverdige brøker er essensielt for å kunne sammenligne, sortere og regne med brøker. Mange elever bruker regelen «multipliser teller og nevner med samme tall», uten å forstå at det fungerer fordi de i realiteten multipliserer brøken med 1. Å bare pugge regler og prosedyrer medfører sammenblandinger og misoppfatninger i arbeidet med brøk. Eksempel: Det er lett å tenke at brøken $\frac{2}{8}$ er dobbelt så stor som $\frac{1}{4}$, fordi teller og nevner blir multiplisert med 2 (heltallstenking).

Mangel på forståelse og erfaring med likeverdige brøker kan føre til at elevene ikke tror det finnes brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$. Først når elevene vet at de to brøkene kan utvides vil de for eksempel se at $\frac{7}{10}$ er en brøk mellom $\frac{6}{10}$ og $\frac{8}{10}$. Mangelfull forståelse av likeverdige brøker vil føre til utfordringer når elevene skal regne med brøk.

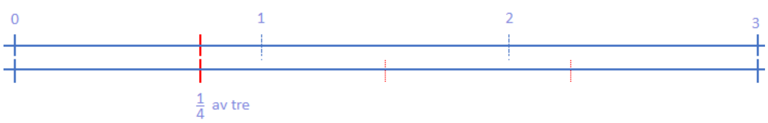
Fokus på regler og algoritmer framfor begrepsforståelse

I regnestykker kan brøk vanligvis tolkes på to måter: brøk som en tallstørrelse eller et mål, eller brøk som operator. I addisjon og subtraksjon er det naturlig å se på brøk som tallstørrelse eller mål, mens i multiplikasjon og divisjon er det lettere å tolke brøk som operator.

Eksempel: I uttrykket $3 \cdot \frac{1}{4}$ er det naturlig å se for seg tre ganger tallstørrelsen $\frac{1}{4}$, $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$, figur 12. I regnestykket $\frac{1}{4} \cdot 3$, er det naturlig å se på $\frac{1}{4}$ som en operator, som en firedel av tre, figur 13.



FIGUR 12 EKSEMPEL PÅ BRØK SOM TALLSTØRRELSE, 3 · ¼



FIGUR 13 EKSEMPEL PÅ BRØK SOM OPERATOR, 1/4 · 3

Addisjon og subtraksjon

Addisjon og subtraksjon av brøk består av flere trinn, som hver for seg kan føre til misoppfatninger. For å forstå addisjon og subtraksjon av brøk, må elevene ha god forståelse av ulike aspekter ved brøk, og hva som ligger i begrepet likeverdige brøker. Det er fristende å innføre regnemetoder for å manipulere med brøker før det begrepsmessige grunnlaget er lagt, noe som lett fører til sammenblanding av regler og utvikling av misoppfatninger.

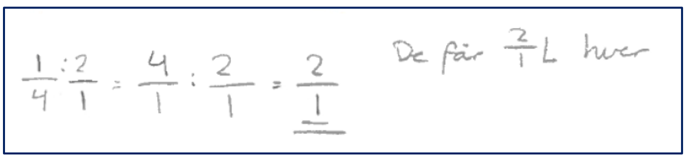
Eksempler:

Noen elever adderer $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{2}$ og får $\frac{4}{4}$ til svar. De har lært en regel om at de kan addere to brøker ved å legge sammen tellerne og beholde nevnerne, og beholder 4 som nevner. Andre beholder 2 som nevner og får 2 til svar. I tillegg vil noen elever addere både tellerne og nevnerne og få $\frac{4}{6}$ til svar.

Multiplikasjon og divisjon

Multiplikasjon og divisjon av brøk – rent mekanisk – er veldig enkelt. I multiplikasjon er det bare å multiplisere teller med teller og nevner med nevner, og i divisjon gjør man helt likt, etter først å ha byttet plass på teller og nevner i dividenden (den bakerste brøken). Når reglene er så enkle, er det kanskje mer fristende å bare pugge dem, enn å prøve å forstå hvordan og hvorfor de virker. Elevene må stole på hukommelsen, fordi bruk av reglene alene gir ikke elevene innsikt i om løsningen de får er rimelig.

Eksempel: En elev skal løse følgende oppgave: Henrik og Kasper deler likt $\frac{1}{4}$ liter saft. Hvor mye saft får de hver? Eleven har lært seg en regel for divisjon med brøk: *Snu først den andre brøken og multipliserer den med den første.* Eleven har snudd den første brøken og glemt å skifte regneart og får til svar at Henrik og Kasper får 2 liter saft hver, figur 14. Eksemplet viser at eleven ikke vurderer om det er rimelig.



FIGUR 14 ELEVSVAR DIVISJON MED BRØK

Kilder:

- Brekke, G. (2002). Kartlegging av matematikkforståelse. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk
- Brekke, G. (2002). Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til tall og tallregning. E, G og I
- Lamon, S. J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for teachers. Routledge, 2011.
- Horne, A og Mitchell, A. (2010) Australian Catholic University. *Gap Thinking in Fraction Pair Comparisons is not Whole Number Thinking: Is This What Early Equivalence Thinking Sounds Like?*
- McIntosh, A. (2007). Alle teller. Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen.
- Parrish, S. og Dominick A. (2016). Number Talks. Fractions, decimals and percetages.
- Solem, I. H., Alseth, B. og Nordberg, G. (2017). Tall og tanke 2. Matematikkundervisning på 5. – 7. trinn, kap 6 og 7. Gyldendal forlag.
- Van de Walle, J. A. et al. (2013). Elementary and Middle School Matematics. Teaching Developmentally