REALFAGSLØYPER

Matematisk kompetanse

FEBRUAR 2018

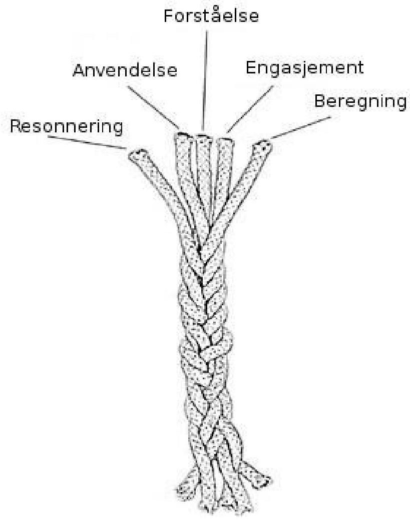
NATURFAGSENTERET
NASJONALT SENTER FOR NATURFAG I OPPLÆRINGA

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Ingvill M. Stedøy
NTNU

Innholdsfortegnelse

Trådmodellen



Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. De fremhever at disse fem komponentene et tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Komponentene støtter hverandre, og det er viktig at elevene får mulighet til å utvikle alle de fem komponentene samtidig. Forbindelsen mellom de ulike komponentene blir da forsterket, og elevene utvikler en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant. De fem komponentene finner vi igjen i sitatene om tallforståelse fra Case og McIntosch et al., og denne definisjonen av matematisk kompetanse kan ses som et mulig utgangspunkt for nærmere drøfting av læring av og undervisning i matematikk på ungdomstrinnet og i videregående skole.

I denne artikkelen presenteres en kort beskrivelse av aspekter ved de fem komponentene i matematisk kompetanse, og hver komponent vil bli belyst med eksempler fra matematikk som er relevant for ungdomstrinnet og videregående skole. Eksemplene bygger på forskning og utviklingsarbeid gjort ved Matematikksenteret.

Det legges vekt på å belyse hvordan begrepsbygging og bruk av matematisk notasjon kan øke elevenes kompetanse og fortrolighet med det matematiske språket, slik at de blir bedre rustet til å møte faget på et høyere nivå.

Forståelse

Forståelse innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Forståelse handler også om å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som kan være nyttig for et gitt formål. Denne type forståelse kalles relasjonell forståelse. Dette er noe annet enn instrumentell forståelse, som innebærer å lære et økende antall regler og formler som hjelper eleven med å finne løsningen på oppgavene. Denne type forståelse medfører at elevene bruker prosedyrebegrunnelser i stedet for begrunnelser som bygger på matematiske resonnementer.

Representasjoner og overganger mellom dem

Funksjoner kan representeres som grafer, tabeller, formler, likninger, beskrivelser med ord, og studere egenskapene ved funksjonene ut fra de ulike representasjonene. Det å kunne tolke de ulike representasjonene og veksle mellom dem er av stor betydning for utvikling av funksjonsbegrepet.

Eksempel 1

Se på den lineære funksjonen $f(x) = -2x + 4$ som

For elevene kan tolkningen av denne funksjonen være forskjellig, avhengig av hvilke erfaringer de har fra før. Det kan komme fra idéer som at det er:

- Ei rett linje med stigningstall -2 og konstantledd 4.
- En funksjon som multipliserer et tall med -2 og legger 4 til svaret.
- Ei rett linje som går gjennom (0,4) og (2,0)
- Tabellen:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	6	4	2	0

- Alle løsninger av likningen $y = -2x + 4$
- Grafen går gjennom (0,4), og for å komme til neste punkt må du gå 2 enheter ned og 1 enhet til høyre.
- Funksjonen kan være en modell for …

Eksempel 2

En annengradsfunksjon kan skrives på ulike måter der hver av dem kan si ulike ting om funksjonens egenskaper. Se på funksjonen

$$f(x) = (x-2)^2 - 9 = (x+1)(x-5) = x^2 - 4x - 5$$

Hvordan kan skrivemåtene (representasjonene) hjelpe til med å bestemme ulike egenskaper ved funksjonen?

Kommentarer: Elever som ikke har sett de ulike representasjonene før, kan ha litt vanskeligheter med å komme i gang. Da kan spørsmålene spisses litt, for eksempel:

- Kan du ved å se på ett av uttrykkene, se hva som er funksjonens minste eller største verdi, og for hvilken x –verdi det skjer?
  - Svar: Ja, det første. Det viser at funksjonsverdien aldri kan bli mindre enn – 9. $f(2) = -9$.
- Kan du ved å se på et av uttrykkene, se hvor grafen krysser x –aksen (eventuelt finne nullpunktene til funksjonen)?

  - Svar: Ved å se på uttrykket i midten kan vi se at nullpunktene er (-1,0) og (5,0).
- Kan du ved å se på et av uttrykkene, se hvor grafen krysser y –aksen?
  - Svar: Det siste uttrykket viser at punktet (0,5) ligger på grafen.

Ulike egenskaper ved funksjoner

Begrepsmessig forståelse av funksjoner består i å kunne beskrive egenskaper ved funksjonene, analysere funksjonsuttrykket og skissere grafen uten å sette opp tabell, si noe om lokale og globale egenskaper til funksjonen og hvordan den endrer seg.

Eksempel 3

Elever som ikke har studert eksponentialfunksjoner, men vet hva potenser er, få i oppdrag å se på funksjonen $f(x) = a^x$

- vurdere hvordan egenskapene til funksjonen er for ulike verdier av a
- avgjøre om funksjonen krysser koordinataksene
- avgjøre om funksjonen er definert over alt
- avgjøre om funksjonen er voksende eller avtagende
- diskutere og finne ut hvordan grafene til f og f' ser ut

Tanker og spørsmål elevene kan ha:

- Kan a være negativ?

Elever og lærer blir enige om at hvis funksjonen skal være veldefinert, må $a > 0$.

- $f(x) > 0$ for alle verdier av x fordi alle potenser med positivt grunntall er positive. Det betyr at grafen alltid ligger over x-aksen.

a^x vokser fortere og fortere når x blir større. Men det er bare hvis $a > 1$. Hvis $0 < a < 1$ vil grafen avta. Da avtar den mest hvis a er negativ. Så f er voksende hvis $a > 1$ og avtagende hvis $0 < a < 1$.

Kommentar. Da dette ble prøvd ut i en S2 klasse, brukte elevene lang tid på å komme fram til dette. De hadde ulike forslag som de forkastet ved nærmere ettertanke. Noen trodde grafen ville se ut som en parabelliknende graf, og noen var inne på at den krysset x-aksen. Når de begynte å tenke på potensreglene, innså de at grafen ville nærme seg x-aksen, negativ x-akse hvis $a > 1$ og positiv x-akse hvis $0 < a < 1$. Når dette var klarlagt, fant de ut at uansett hvilke verdi $a$har, så vil grafen gå gjennom punktet (0,1).

- Hvis $0 < a < 1$, må den deriverte være negativ. Den er mest negativ til venstre for y-aksen, og så blir den mindre og mindre negativ når x øker.

Kommentar: Flere grupper diskuterte om grafen til f' kunne være ei rett linje, men det ble forkastet da de innså at den ville krysse x –aksen, og derfor bli positiv. Tilsvarende diskusjon foregikk i tilfellet $a > 0$. De kom fram til at

- grafen til den deriverte likner på grafen til funksjonen selv. Men vi vet ikke hvor den krysser y –aksen. De ulike grafene har forskjellig bratthet når $x = 0$, avhengig av verdien til a. Grafen til den deriverte når $0 < a < 1$ likner også, men den er speilet om x –aksen.

Eksempel 4

- Hva slags symmetri har en funksjon med egenskapen $f(-x) = f(x)$?
- Gi eksempel på en funksjon med egenskapen over
- Hva slags symmetri har en funksjon med egenskapen $f(-x) = -f(x)$?
- Gi eksempel på en funksjon med egenskapen over
- Hva må være oppfylt for at en funksjon skal være symmetrisk om linja $y = x$?
- Gi eksempel på en funksjon med egenskapen over.

Relasjoner mellom funksjoner

Dette aspektet består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom funksjoner og beskrive det med ord og formler.

Eksempel 5

Se på funksjonene $f(x) = x^2, x \geq 0$ og $g(x) = \sqrt{x}$

- Hva er sammenhengen mellom grafene disse funksjonene?
- Hva er resultatet hvis du velger en x –verdi, regner ut f(x), tar svaret og setter inn i uttrykket for g(x) og regner ut funksjonsverdien? Prøv med flere verdier. Sett opp en hypotese og bevis at hypotesen stemmer.

Gjør det samme som over, men start med g(x) og sett svaret inn i f(x).

Kommentar: Elevene vil kunne si at grafene har samme form. Den ene er «snudd» og dreid i forhold til den andre. På spørsmål om det er en form for symmetri, vil elevene svare at den ene er speilbildet av den andre. Når de blir bedt om å tegne speilingslinja, tegner de linja $y = x$, og de kan skrive opp formelen for denne linja.

Elevene setter inn ulike verdier, og ser at når de først bruker den ene funksjonen og deretter den andre, så kommer de «tilbake til start». Vi introduserer begrepet *omvendte funksjoner,* og notasjonene $f(g(x)) = x$ og $g\big(f(x)\big) = x$.

Eksempel 6

Gjør det samme med funksjonene $v(x) = 2x + 2$ og $w(x) = \frac{1}{2}x - 1$, og med funksjonene $h(x) = log_a(x)$ og $t(x) = a^x$.

Kommentar: Elevene ser nå at v og w er to linjer som er symmetriske om $y = x$. De ser at det er omvendte funksjoner. De har litt problemer med sammenhengen mellom funksjonsuttrykkene, men når vi skriver $g(x) = \frac{x-2}{2}$ er det lettere å se. Den ne ganger med 2 og legger 2 til svaret. Den andre trekker fra 2 og deles svaret på 2. For å gå motsatt vei, hjelper det å skrive $v(x) = (x + 1) \cdot 2$ hvis de skal sammenlikne med det opprinnelige uttrykket for w. Med algebra innser elevene at uttrykkene er like.

Ut fra definisjonen av logaritmen til et tall, skjønner elevene at h og t er omvendte funksjoner, og at grafene er speilet om $y = x$ i forhold til hverandre.

Eksempel 7

Finn par av funksjoner med samme relasjon som i eksemplene foran, det vil si omvendte funksjoner.

Kommentarer: Elevene kommer opp med eksempler på rette linjer, først uten konstantledd, men deretter med konstantledd også.

Så er det vanskelig å komme på noe. Når læreren skriver $f(x) = x^3$, kommer $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ fort på plass. Etter dette kommer det mange forslag, og elevene tegner dem i GeoGebra for å sjekke at det stemmer.

Beregning

Denne komponenten i matematisk kompetanse handler om å kunne utføre ulike matematiske prosedyrer nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. Fleksibilitet består i å veksle mellom ulike prosedyrer og foreta hensiktsmessige valg i en gitt situasjon.

Varierte strategier

Utvikling av dette aspektet kan ta utgangspunkt i en praktisk situasjon og bruke illustrasjoner, konkreter, symboler eller ulike regnemetoder. Når strategier utvikles gjennom ulike tilnærminger, er det viktig at elevene også beskriver tankene sine både muntlig og skriftlig, slik at en bevissthet om fremgangsmåten kan generaliseres utover den gitte konteksten.

Eksempel 8

Elevene skal løse andregradslikninger, for eksempel i forbindelse med å finne nullpunktene til en andregradsfunksjon. Da er det et viktig poeng å få elevene til å se på uttrykket før de velger metode. Veldig mange elever har en tendens til å bruke formelen for å løse andregradslikninger, uansett om konstantleddet er 0, det lineære leddet er 0, eller andre andregradsuttrykk som enkelt kan faktoriseres. Dette gjelder også elever som aldri har sett eller forstått hvor andregradsformelen kommer fra. Elever som har forstått at for å løse andregradslikninger, må vi redusere problemet til å løse to førstegradslikneinger ved å faktorisere, vil velge den beste strategien. De vil også innse at hvis andregradsuttrykket ikke lar seg faktorisere, så har det ingen (reelle) nullpunkter.

Hensiktsmessige strategier

Skal man velge en hensiktsmessig strategi må man kunne vurdere et uttrykk, en likning eller tilsvarende og velge strategi ut fra hva som er enklest og mest effektivt.

Eksempel 9

Bestem nullpunktene til funksjonene.

a) $f(x) = x^2 + x$

b) $f(x) = 4x^2 - 25$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

d) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

Kommentarer: Her må elevene se hvilke andregradslikninger som skal løses. De skal vurdere hvordan likningene kan løses ut fra idéen om at faktorisering er grunnlaget for å kunne løse polynomlikninger Da vil de kunne velge enklere strategier enn bruk av formel, i alle fall på de tre første uttrykkene. Det vil være naturlig å faktorisere slik:

a) $x^2 + x = x(x + 1)$
b) $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$
c) $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

Elevene vil enkelt kunne løse likningene ved hjelp av nullpunktsetningen. Den siste faktoriseringen (d)) er kanskje vanskelig å se for mange elever hvis de ikke har trent mye på faktorisering. De vil ta i bruk formelen for løsning av annengradslikninger. Men den kan også faktoriseres slik:

d) $2x^2 + 3x - 2 = 2(x - \frac{1}{2})(x + 2)$

Eksempel 10

Derivér funksjonene: a) $f(x) = \frac{1}{x^3+2x}$ b) $f(x) = (3x^2 + 4x + 2)^4$

Kommentarer: Elevene har lært derivasjon av et produkt av to funksjoner, en kvotient mellom to funksjoner og kjerneregelen. Når de ser et funksjonsuttrykk som skal deriveres, må de avgjøre i hvert tilfelle både hvilke regler som kan brukes, og hvilke som er mest hensiktsmessig. Den første funksjonen kan deriveres med en kombinasjon av kvotientregelen og kjerneregelen, men det blir enklere å skrive om til $(x^3 + 2x)^{-1}$ for så å bruke kjerneregelen. Mange elever kjenner til at den deriverte til $\frac{1}{x}$ er $-\frac{1}{x^2}$, og bruker kjerneregelen direkte.

Den andre funksjonen kan deriveres direkte ved kjerneregelen, eller elevene kan multiplisere ut parentesen, for deretter å derivere.

Elevene må vurdere hva som er hensiktsmessig for dem.

Anvendelse

Komponenten anvendelse består i å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemer, kunne oversette fra hverdagsspråk til matematisk språk og symbolspråk, velge passende representasjoner, planlegge og gjennomføre løsninger på problemet, og vurdere hvor rimelig løsningene er. Med matematiske problemer menes det her problem i hverdags-, arbeids- og samfunnsliv der matematikk kan anvendes, men også abstrakte matematiske problem og spørsmål.

Gjenkjenne og formulere matematisk situasjoner

Dette aspektet ved anvendelse innebærer å gjenkjenne situasjoner der ulike matematiske begreper og ideer kan brukes til å beskrive situasjonen. Situasjonen må omformuleres til et matematisk problem eller en matematisk modell som skal løses eller analyseres. Innhenting av nødvendig informasjon og vurdering av om resultatene er rimelige, hører også med.

Eksempel 11

Elevene får utdelt et sett med empiriske data basert på gjennomsnittlig månedstemperatur et bestemt sted gjennom et helt år. De skal lage en matematisk modell for hvordan temperaturen varierer på dette stedet gjennom et år.

Kommentarer: Det kommer an på forkunnskapene til elevene hvilken matematisk modell de velger. Hvis de ikke har hørt om periodiske funksjoner, vil de komme til å velge for eksempel et polynom. Denne modellen vil ha veldig begrenset gyldighetsområde, noe elevene må vurdere og kommentere. Elever som har arbeidet med periodiske funksjoner, vil naturlig kunne velge en sinusfunksjon som modell. De må også vurdere avvik fra modellen, og begrunne det. Men de kan også med en viss sikkerhet kunne utvide modellen og forutsi temperaturer det neste året for eksempel.

Elevene kan også si noe om på hvilke tidspunkter av året temperaturen øker mest, minst, er på maksimum og minimum, alt ut fra den matematiske modellen de har valgt. Elever som er fortrolig med derivasjon, vil kunne bruke det til å svare på slike spørsmål, mens andre elever vil kunne tolke et grafisk bilde.

Resonnering

Resonnering er limet som holder matematikken sammen. Det dreier seg om å tenke logisk og bruke gyldig argumentasjon for å forklare og bevis en metode, en påstand eller en løsning. Videre handler det om å utforme hypoteser, teste dem, og eventuelt bevis eller forkaste dem. Da må en kjenne de matematiske spillereglene og vite hva som kan betraktes som kjent, i forhold til hva som må begrunnes og bevises. Elevene skal også kunne følge med på andres resonnement og avgjøre om det er holdbart eller ikke.

Gjenkjenne og beskrive struktur, mønster og sammenheng

Dette aspektet ved resonnering innebærer blant annet å se etter fenomener som kan generaliseres og være allment gyldig. Det vil som oftest foregå på en induktiv måte. Man studerer et fenomen og leter etter egenskaper, eller sammenlikner flere ting som kan ha noe som er felles og noe som er ulikt.

Eksempel 12

Elevene får i oppgave å studere formen på grafene til polynomfunksjoner av ulik grad større eller lik 2. Hvis de tegner grafer til mange annengradsfunksjoner, ser de at formen likner, at de har enten et maksimum eller minimum. De fortsetter med polynomer av grad tre og fire. Litt avhengig av hva de prøver, vil de kunne komme fram til denne hypotesen:

Et polynom av grad n har (n-1) ekstremalpunkter.

Kommentar: Dette er et fint utgangspunkt for diskusjon. Kan dette bevises? Elevene må ha en forståelse for at hvis de skal bevises, så må det vises for *alle* polynomer. Hvis det skal motbevises, så er det nok å finne ett moteksempel. Noen finner kanskje ut at x^3 har ingen ekstremalpunkt og x^4 har ett ekstremalpunkt. Hypotesen må reformuleres til følgende resultat:

Det finnes polynomer av grad n som har n-1 ekstremalpunkter.

Engasjement

Denne kompetansen handler om å se matematikk som interessant, morsomt, nyttig og verdifull. Videre innebærer det å ha tro på at alle kan lære matematikk, og at en lærer ved å streve, gjøre feil, prøve igjen, og ikke gi opp.

Ha tro på at innsats fører til læring

Dette aspektet ved engasjement handler om å være utholdende og ikke gi opp. Elever som har gitt opp, må få tilbake troen på seg selv ved at lærere gir dem oppgaver de har mulighet til å mestre ut fra egne forkunnskaper. Det må sette læringsmål, og elevene må vurdere seg selv i forhold til læringsmålene, og se at innsats nytter. Det er hardt arbeid å lære nye ting, men det gir resultater. Elever som er vant til å få til alt med en gang, har ikke fått nok utfordringer. De vil føle at de ikke lærer noe, med mindre de blir utfordret til å løse problemer og oppgaver de ikke kan klare med en gang. Det er like viktig for høytpresterende elever som for lavtpresterende elever å erfare at de må jobbe hardt for å lære nye ting.

Utfordringer som krever innsats

Oppgaver og problemer som krever noe annet enn å følge innlærte metoder og rutiner er motiverende for alle elever. Hvis oppgavene har et nivå som er passe utfordrende, slik at eleven må vise utholdenhet og kreativitet, være villig til å forkaste én idé for å prøve nye, for så å bli belønnet med å føle mestring. Det behøver ikke å bety at elevene alltid må klare utfordringene helt til fullstendig løsning for å føle mestring. Det er nok å oppleve følelsen av å ha bidratt til at gruppa eller klassen har sett noen sammenhenger, nærmet seg en løsning eller kommet fram til et endelig resultat.

Flere fremgangsmåter for samme type problem

Ulike fremgangsmåter og sammenligning av dem gir mulighet til å se et problem fra ulike sider. Det gir også mulighet for å tenke kreativt, velge hensiktsmessige fremgangsmåter og å etablere relasjoner mellom ulike ideer. Elevene bør se på disse elementene som viktige i arbeid med ulike problem, og som oftest vil dette være viktige enn selve svaret når en lærer seg matematikk.

Utvikling av matematisk kompetanse

De fem komponentene – forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement – og aspektene ved hver av dem er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. De støtter hverandre, og det er viktig å være klar over at de utvikles samtidig. En oppgave legger gjerne opp til noen aspekter i større grad enn noen andre, og det kan være viktig at læreren også velger hvilke aspekter han ønsker å fremheve under arbeidet med en gitt oppgave. Men det er viktig at alle de ulike aspektene arbeides med over tid. Elevene utvikler da en forståelse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant både for videre matematikklæring, i deres hverdagsliv og seinere i utdannelse og yrke.

Bevissthet og metakognisjon er sentrale aspekter ved matematikklæring. Elever som får arbeide med matematikk med utgangspunkt i denne forståelsen av trådmodellen vil implisitt utvikle både bevissthet og metakognisjon. Men det er også viktig å diskutere utvikling av kompetansene eksplisitt med elevene. Spesielt vil aspekter ved *engasjement* kunne forsterkes gjennom diskusjon med elevene om hva matematikk handler om og hvordan man lærer matematikk. Verdien av representasjoner og nytten av å utvikle flere fremgangsmåter må inngå i denne prosessen. Diskusjoner der man "ser ovenfra" på arbeid med matematikk og regneoperasjoner, og diskuterer hva, hvordan og hvorfor elevene skal lære matematikk, kan bidra til økt motivasjon og bedre prestasjonen i faget.

Referanser

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.