



Kartlegging
av
matematikkforståelse

Gard Brekke

Utdrag fra

Introduksjon til
diagnostisk undervisning
i matematikk

Diagnostiske oppgaver
Diagnostisk undervisning

Diagnostiske oppgaver

Hva er misoppfatninger?

Det er velkjent at det er en kritisk fase i læringen av matematikk når tallområdet blir utvidet fra hele tall til å omfatte brøk og desimaltall.

Barn møter desimaltall i forbindelse med penger eller målinger før dette emnet blir aktuelt i undervisningen. Det sentrale i disse erfaringene er at det er et helt antall kroner på den ene siden av komma og et helt antall øre på den andre siden av komma. Tilsvarende er det for meter og centimeter når en har gjort en måling. Det kan synes som den undervisningen en gir om at et desimaltall er ett tall som kan inneholde tideler, hundredeler, tusendeler osv, ikke fortrenger denne oppfatningen fra erfaringer fra arbeid med penger og målinger.

Vi berører her et sentralt problem i matematikkundervisningen: å få elevene til å innse at de ideer og begreper de har dannet, ikke alltid gjelder i alle nye situasjoner. Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at en har gjort erfaringer på et avgrenset felt. Vi kaller ufullstendige tanker knyttet til et begrep for misoppfatninger.

Det er viktig å forstå forskjellen på de feil elevene gjør, og de misoppfatninger de har. En feil kan komme mer eller mindre tilfeldig, fordi en ikke er oppmerksom nok eller ikke leser oppgaven godt nok osv. Misoppfatninger er ikke tilfeldige. Bak dem ligger det en bestemt tenkning – en idé – som en bruker nokså konsekvent. Ofte er dette et resultat av en overgeneralisering av tidligere kunnskaper til nye områder der disse kunnskapene ikke gjelder fullt ut. En kan gjerne se på dette som forsøk på å skape mening og sammenheng i det en lærer.

Nedenfor skal vi se nærmere på hvordan elevene bygger opp forståelse av multiplikasjonsbegrepet. Dette har også en parallell til barns språkinnlæring, for eksempel når det gjelder svak bøyning av verb.

Barn bygger vanligvis sin første forståelse av de fire regneartene på erfaringer med små hele tall. Disse regneoperasjonene er vanligvis introdusert ved hjelp av enkle tankemodeller som ikke direkte lar seg generalisere til arbeid med desimaltall, og som derfor ofte fører til at misoppfatninger oppstår. Dersom en bare får oppleve multiplikasjon som gjentatt addisjon med like store addender, vil en utvikle en snever tankemodell for hva multiplikasjon egentlig er. En kan snakke om at en har et delvis begrep om multiplikasjon. Med bakgrunn i denne tankemodellen vil det være vanskelig å gjøre et overslag av svaret på $0,62 \cdot 0,37$. Mange elever vil tro fast på at multiplikasjon alltid gir et større svar enn utgangspunktet, fordi all deres erfaring med gjentatt addisjon tilsier dette. Tilsvarende vil elever som bare møter delingsdivisjon være ute av stand til å knytte en praktisk mening til regneuttrykket $12 : 0,4$.

Her må en bruke målingsdivisjon. Elevene trenger å bli gjort klar over at de har med målingsdivisjon å gjøre. Et konkret eksempel kan være: 12 m gardinstoff blir målt opp i lengder på 0,4 m. Hvor mange slike lengder får vi? Her er det ikke snakk om at noe skal deles «rettferdig».

En annen viktig årsak til misoppfatninger er at mange elever ikke skiller mellom begrepet multiplikasjon – hvilke ideer som er knyttet til multiplikasjon og utregningsmåten – og multiplikasjonsalgoritmen. Erfaringene til elevene med multiplikasjon har for det meste vært knyttet til det å utføre multiplikasjonen, altså algoritmen. Å kunne multiplikasjon er, for disse elevene, å kunne algoritmen eller å huske multiplikasjonstabellen.

Det er trolig ikke mulig å unngå at misoppfatninger og delvise begreper blir dannet. De er en del av barnas normale utvikling. Nye ideer blir tolket ut fra eksisterende erfaring. Ugyldige slutninger blir ofte trukket – og generaliseringer blir gjort – på sviktende grunnlag. Oppfatninger av dette slaget finner en innenfor alle felt av matematikken.

Noen vanlige misoppfatninger innenfor tall og tallregning:

- Det lengste tallet har alltid størst verdi.
- En kan ikke dele et lite tall med et stort.
- Multiplikasjon gjør alltid svaret større.
- En kan bare dividere med hele tall.
- $3 : 6$ og $6 : 3$ gir samme svar.
- Divisjon gjør alltid svaret mindre.

Slike misoppfatninger, som gjerne kan gi eleven riktige svar også i andre tilfeller enn for hele tall, følger ofte eleven gjennom hele skoletiden og senere i livet. De viser seg å være så grunnfestet at de tjener som rettesnor framfor det logiske i en situasjon, for eksempel når det gjelder å velge riktig regneoperasjon i denne oppgaveeksempel 1:

Kjøttdeig koster 69,50 kroner per kg, hvor mye koster 0,86 kg?

Opgaveeksempel 1: Regneoppgave med divisjons-/multiplikasjonsproblem

Mange velger divisjon som operasjon fordi de vet at svaret skal bli mindre enn 69,50 kroner. En ser også at elever ofte tror at om en forandrer tallene i en oppgave, så er det ikke sikkert at regneoperasjonen en må bruke i løsningen, forblir den samme. Vanlige undervisningsmetoder har vist seg å være ineffektive når det gjelder å få bukt med slike problemer. Dette gjelder både metoder hvor en ignorerer misoppfatningene, og metoder hvor en forsøker å unngå misoppfatninger ved å definere

begrepene nøyaktig og fullstendig ved den første innføringen.

Hva er diagnostiske oppgaver?

Prøver i matematikk blir vanligvis holdt etter en undervisningsperiode. Hovedmålet med prøven er vanligvis å finne ut hvor godt elevene har fått tak på visse fakta, ferdigheter og/eller begreper.

Målet med det vi kaller *diagnostiske oppgaver*, er noe ulikt dette. Diagnostiske oppgaver kan gjerne komme *før* en undervisningssekvens og blir brukt til

- å identifisere og framheve misoppfatninger som elevene har utviklet, også *uten* at det trenger å ha vært noen formell undervisning i det en vil undersøke
- å gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver
- å rette undervisningen mot å framheve misoppfatningene, for på den måten å overvinne dem og de delvise begrepene
- å utvikle elevenes eksisterende løsningsstrategier
- å måle hvordan undervisningen har hjulpet elevene til å overvinne misoppfatningene ved å bruke de samme oppgavene både før og etter undervisningssekvensen.

Diagnostiske prøver kan gjerne inneholde noen typer oppgaver som elevene ikke tidligere har arbeidet mye med. Elevene vil likevel oftest ha ideer om hvordan de skal angripe oppgavene for å finne et svar. Det er vår erfaring at lærere blir mer sensitive og effektive i undervisningen når de oppdager disse ideene hos elevene og tar hensyn til dem i undervisningen.

Enkelte lærere kan føle at det er feil eller «urettferdig» å prøve elevene i lærestoff som ikke er «gjennomgått». Det bør gjøres klart for elevene at oppgavene blir brukt på en annen måte enn det elevene er vant med. Hovedmålet er

- å oppdage hvilke tanker de har om ulike begreper
- å bli kjent med de vanskene som er knyttet til disse begrepene
- å hjelpe læreren med å planlegge undervisningen.

Opgavene har ikke til hensikt å vurdere eleven med tanke på rangering.

Prøver til unge elever bør presenteres både muntlig og skriftlig. I noen av oppgavene må elevene oppfordres til å vise hvordan de kom fram til svarene sine. Utrekninger og diagrammer sammen med forklaringer knyttet til løsningen gir oss verdifull informasjon om hvordan elevene tenker. Jo mer skriftlig materiale vi får, desto mer informasjon kan vi få om strategiene deres og ideene knyttet til begrepene og misoppfatningene.

Når fungerer en oppgave diagnostisk?

Av grunner som er nevnt ovenfor, vil en diagnostisk prøve inneholde spørsmål som vanlige elever ofte har problemer med å gi riktig svar på. En vil prøve å unngå å stille spørsmål der elevene kan få riktig svar selv om de har feilaktige ideer knyttet til begrepet. Det er således mulig å skille mellom oppgaver ut fra den diagnostiske informasjon de gir om hvilke tanker elevene gjør seg om et bestemt begrep. For eksempel vil $0,24 : 2$ være en oppgave som gir liten diagnostisk informasjon, siden elever kan få riktig svar selv om de har den misoppfatningen at desimaltall er et par av hele tall. På den andre siden vil $0,12 : 2$ være en god diagnostisk oppgave, fordi den «avslører» disse elevene siden de trolig vil svare 0,6. På samme måte vil det å finne hvilket tall som er størst av 0,23, 0,62 og 0,42, være en oppgave som gir liten diagnostisk informasjon. Stiller en derimot samme spørsmål om tallene 0,62, 0,236 og 0,4, så vil en ha en god diagnostisk oppgave.

Hvordan bruke diagnostiske prøver i klasserommet?

En diagnostisk prøve vil inneholde relativt mange oppgaver der elevene gir feil svar. Det er således viktig at elevene vet noe om hovedsiktemålet med prøvene, og at disse skiller seg fra vanlige prøver. Diagnostiske prøver kan brukes på flere måter. De må oppfattes som en samling av diagnostiske oppgaver som kan være et godt redskap til å vinne kunnskap om tenkningen hos den enkelte elev og om hvor utbredt de ulike ideene er i klassen. Diagnostiske prøver kan sees på som en samling av oppgaver som har vist seg å gi rik informasjon til undervisningen, både når de blir løst i samtale mellom lærer og elev, og når de er en del av en skriftlig prøve. Det må understrekes at hver diagnostisk oppgave er knyttet til et bestemt problemområde innenfor det aktuelle begrepet.

Diagnostisk undervisning

Lærebøker har tradisjonelt lagt hovedvekten på eksempel-regel-metoden knyttet til fakta og ferdigheter, med øving på disse som det viktigste. Lærebøker er utformet slik blant annet med tanke på å lette arbeidet for en travelt opptatt lærer. Av samme grunn er språket gjort så enkelt som mulig. Oppgavene er svært ofte fragmentert til små isolerte steg, der målet er å øve seg slik at en kan mestre disse stegene – ett om gangen. På den måten blir elevenes aktiviteter i første rekke rettet mot dette, mens aktiviteter som retter seg mot begrepsmessige diskusjoner og refleksjoner, kommer i andre rekke. For å lage bøker som passer til individuelt arbeid, har en ofte tidligere lagt vekt på å velge teksten på oppgavene så nær opp til selve regneprosedyren som mulig. På den måten blir den matematiske oppgaven nærmest en slags stenografi av teksten. Et eksempel på dette er at en i et tekststykke om divisjon «alltid» lar divisoren komme etter dividenden, som i oppgaven: 15 epler skal deles på 5 personer, hvor mange til hver? Et annet

eksempel innenfor divisjon kan være at en i teksten «alltid» lar det største tallet komme først. Dette kan være med på utvikle to av de misoppfatningene om divisjon som er nevnt under *Hva er misoppfatninger?*

Det kan også stilles spørsmål ved hvilken rolle tekstoppgaver (eller såkalte praktiske oppgaver) i første rekke skal ha i matematikken. Skal de være der for å vise at det vi lærer i matematikken, er praktisk nyttig, er de der for at vi skal bruke dem til å øve på bestemte regneprosedyrer, eller bør vi legge vekt på tekstoppgaver fordi de er et viktig element i å utvikle solide matematiske begreper? Det kan virke som om en i mange lærebøker – tidligere i alle fall – har vært så opptatt av i første rekke å undervise i regneteknikker og -prosedyrer at også tekstoppgavene har hatt dette som sitt hovedmål. Da vil for eksempel flertallet av oppgavene i et kapittel om divisjon handle om divisjon. Det elevene har å gjøre i løsningen av oppgavene, vil være å dividere tallene som finnes i teksten. Elevene blir sjeldnere stilt overfor problemet med å velge riktig regneoperasjon.

Å velge regneoperasjon er problematisk for mange elever. Det er en velkjent sak at elevene etter hvert utvikler strategier for valg av regneoperasjon ut fra erfaringer som har lite med forståelsen av selve strukturen i oppgaven å gjøre, for eksempel:

- Er det mer enn to tall, så adder dem.
- Er de to tallene omtrent like store, så subtraher det minste fra det største.
- Er det ene tallet relativt stort i forhold til det andre, så dividerer det store med det lille.
- Går ikke divisjonen opp, så er det kanskje multiplikasjon.

Det eksisterer nå en stor mengde forskningsresultater om undervisning og læring av matematikk som viser at for å forstå et matematisk begrep er det bedre å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter enn å gjennomføre en lang rekke øvelser¹. Aktivitetene må på en naturlig måte inneholde noen av de sentrale ideene et begrep er satt sammen av, og må være slik at disse ideene kan diskuteres og takles i dybden. Dette blir gjort for at elevenes alternative strategier og tanker rundt begrepet skal komme fram i lyset og på den måten knyttes til det faglige innholdet i begrepet.

En arbeidsmåte der vi bevisst setter søkelyset på – og arbeider med – vanlige feil og misoppfatninger som elever har, er kalt diagnostisk-responsiv undervisning, eller bare diagnostisk undervisning. I denne arbeidsmåten er det tale så vel om en diagnostisering av tanker som enkelte

¹ Se kildehenvisninger i Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk (20,21,22,23,10)

elever har utviklet rundt et bestemt begrep, som det matematiske innholdet av lærestoffet.

Formålet med diagnostiseringen er å finne fram til hvilke erfaringer elevene trenger å gjøre gjennom undervisningen for å bygge opp det aktuelle begrepet. Diagnostisk undervisning baserer seg således på at det i prinsippet er mulig å identifisere hvilke tanker elevene har gjort seg om det kommende lærestoffet, og hvilke misoppfatninger og hindringer elevene vanligvis møter når de utvikler ulike begreper i matematikken.

Skjematisk kan en trekke fram følgende faser i diagnostisk undervisning:

1. Identifisere misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.
2. Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvise begreper blir framhevet. En kaller dette å skape en *kognitiv konflikt*.
3. Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.
4. Bruke det utvidede (eller nye) begrepet i andre sammenhenger.

Det er et hovedpoeng i denne arbeidsmåten at en spesiell aktivitet i undervisningen skal være intensiv. Det vil si at aktiviteten er rettet mot å framheve misoppfatninger og begrepsmessige hindringer. Målet med denne intensiteten er å skape en reflekterende tenkning på et høyt nivå rundt det som ved hver anledning er det sentrale ved et begrep. *Konfliktdiskusjoner* kan for eksempel hjelpe til med å rydde misoppfatninger av veien. En lar bevisst eleven møte problemstillinger som er slik at dersom eleven har en bestemt misoppfatning, så skal aktiviteten bringe denne misoppfatningen fram i dagen ved å skape en kognitiv konflikt. Diskusjoner eller refleksjoner rundt det motsetningsfylte i denne konflikten skal så være med på å rydde misoppfatningen av veien. På tilsvarende måte er refleksjon over hvordan nye ideer eller en utvidelse av et begrep er bundet sammen med de erfaringer en har på feltet fra før, et sentralt punkt i denne delen av arbeidet. Et typisk eksempel på dette er hvordan multiplikasjon og divisjon endrer innhold når en går over fra å arbeide med naturlige tall til også å arbeide med desimaltall og brøker.