Dybdelæring – å gripe terskelbegrepene

MARS 2018

Anne-Mari Jensen
NTNU

REALFAGSLØYPER

Innholdsfortegnelse

Innledning

Denne artikkelen bygger på artikkelen Å utvikle elevers begrepsforståelse (Kerstin Pettersson og Gerd Brandell, 2017). Der finner man eksempel på terskelbegrepene funksjon og derivert. Denne artikkelen inneholder et par andre eksempler på terskelbegrep, brøk og sannsynlighet. Den har eksempler på hva som kan gå galt i overgangsfasen og gir noen tips til hva man kan gjøre for å hjelpe elevene over terskelen.

Brøk

«Du kan ikke forkorte faktor mot ledd!» sier læreren til Simen. Han har spurt om læreren kan se på en oppgave han har løst i kladdeboka:

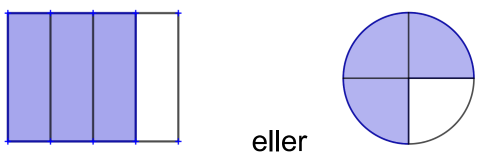
$$\frac{3a+\cancel{4}}{\cancel{4}} = 3a+1$$
.

Læreren sa det samme til Simen for to dager siden også. Nå dukker samme feil opp igjen. Hvorfor har han ikke forstått det læreren sa? Hvordan kan man hjelpe Simen? Er det noen hjelp i det læreren sier?

Hvor ligger problemet?

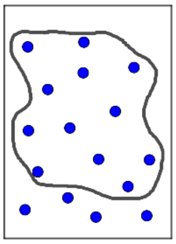
For å forstå hva en brøk er, må man forstå at en brøkstrek er det samme som et deletegn. Elevene må ha hatt mange erfaringer som bekrefter at en brøk og svaret på divisjonen av teller på nevner representerer samme verdi. En brøk representerer også en del av en størrelse, det kan være en del av en enhet eller av en hvilken som helst størrelse. En brøk er dessuten et tall som kan representeres på tallinja.

Elevene må ha arbeidet med brøk både som deler av en hel og som deler av en mengde. Vi kan f.eks. illustrere $\frac{3}{4}$ på ulike måter som *deler av en hel*, for eksempel:



Figur 1

Men hvis vi ser på *deler av en mengde* kan dette forholdet bli vanskeligere å se. F.eks. hvis Per hadde en eske med 16 drops og har spist opp $\frac{3}{4}$ av dem, så har han spist 12 av 16 drops, eller $\frac{12}{16}$ av alle dropsene. For å se sammenhengen må man ha forstått at brøkstreken er et divisjonstegn, at hvis man deler 12 på 16, får man $\frac{3}{4}$, eller at 12 er $\frac{3}{4}$ av 16. Og at det å «dividere eller multiplisere med samme tall i teller og nevner» er det samme som å dividere eller multiplisere med 1.



Figur 2

Så kommer utfordringen med at det er bokstaver i teller, og kanskje også i nevner. Da representerer brøken ikke lenger noen kjent brøkdel, og den kan heller ikke markeres som et tall på tallinja. Nå er det viktig å holde fast på at brøkstreken fortsatt er et divisjonstegn og at det vi kan gjøre med en brøk fortsatt gjelder. Nå blir det også viktig å forstå hva en faktor er, å forstå forskjellen på faktor og ledd og hva vi mener med et faktorisert tall eller uttrykk.

Simen har lært å forkorte brøker for lenge siden. Han har lært at $\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}=1$ og han har lært at det han egentlig gjorde var å dele å dele 4 på 4, eller å dele på 4 både over og under brøkstreken. Det neste var da han fikk oppgaver som han sikkert også løste ganske lett:

$$\frac{3\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}=3 \quad \text{og} \quad \frac{\cancel{4}a}{\cancel{4}}=a$$.

Simen har løst mange slike oppgaver helt riktig, og han sier at det bare er å stryke samme tall over og under brøkstreken. Men når neste terskel i brøkforståelsen skal forseres, blir det ugreit. Da dukker altså $\frac{3a+\cancel{4}}{\cancel{4}}=3a+1$ opp.

Simen hadde lært seg metoden «å stryke like tall i teller og nevner» og han hadde kanskje sluttet å tenke på hvorfor dette ble rett. Han løste jo alle oppgavene riktig. Hadde han forstått at det handlet om divisjon, dvs. at $3 \cdot 4 : 4 = 3$ og at $4a : 4 = a$? Skjønte han at han nå skulle dividere $(3a+4):4$ og hvordan dette er å forstå? Hadde han fått erfaring nok til å bruke den distributive lov og se likheten mellom $(3a+4)\cdot 4 = 3a \cdot 4 + 4 \cdot 4$ og $(3a+4):4 = 3a:4+4:4$? Han visste sikkert at $\frac{3a}{4}+\frac{4}{4}=\frac{3a+4}{4}$, men visste han at $\frac{3a+4}{4}=\frac{3a}{4}+\frac{4}{4}$? Og visste han hva som var faktor og hva som var ledd?

Kanskje gir ikke lærerens velmente råd om å ikke forkorte faktor mot ledd noen mening for Simen, - det er jo ikke første gangen han hører det. Han har egentlig ikke kommet gjennom overgangsfasen fra sist han arbeidet med brøk, han har blitt sittende igjen med noen prosedyrer som så ut til å fungere, og han har vært fornøyd med det. Han må få en bedre forståelse for hva en brøk er før han er klar for å løse den aktuelle oppgaven.

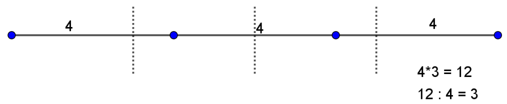
Hvordan kan vi arbeide for å skape bedre forståelse?

For å hjelpe elevene over terskelen kan læreren gi både Simen og resten av klassen noen oppgaver som utfordrer og utdyper forståelsen av hva en brøk er. Klassen må bruke ulike representasjoner for begrepet. I dette tilfellet kan de visualisere eller illustrere brøker med og uten algebrauttrykk, og de kan skrive dem på flere måter. De må bruke tid på å vurdere de ulike representasjonene og forstå og kunne forklare at de står for samme uttrykk.

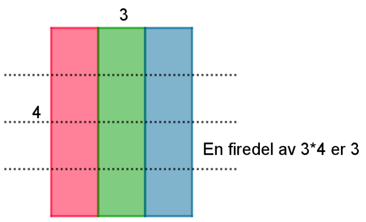
Visualisering

Klassen kan bli bedt om å visualisere $\frac{3\cdot 4}{4}=3$ og $\frac{4a}{4}=a$. Vi lager oss mentale bilder av begreper, ofte visuelle bilder. Å skape og styrke visuell forståelse kan være en god støtte i elevenes oppfatning av et begrep. Det kan dreie seg om å bruke konkreter, tegne figurer eller mer stiliserte illustrasjoner eller diagrammer. En illustrasjon er i dette tilfellet en ny representasjon, og det er ofte nyttig å be elevene tegne eller illustrere et problem.

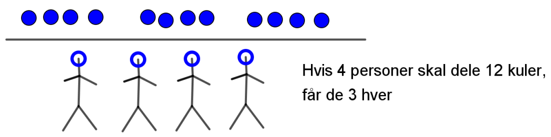
Elevene må illustrere brøkene på en eller annen måte. De kan lage ulike løsninger for $\frac{3\cdot 4}{4}$, som for eksempel:



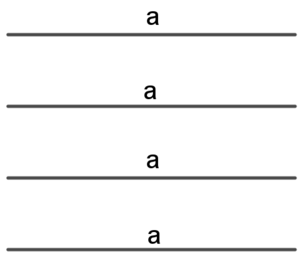
Eller



Eller



Eller



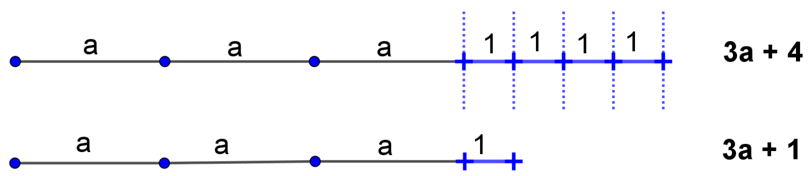
$$\frac{4a}{4} = a$$

Figur 3

Hvis læreren ser at de forstår, kan de få beskjed om å visualisere $\frac{3a+4}{4}$.

Læreren kan også be dem illustrere feilsvaret $\frac{3a+\cancel{4}}{\cancel{4}} = 3a+1$. Kan de se at hva som blir feil når de tegner?

Det kan for eksempel se slik ut:



Linja består av fire biter, tre med lengde a og en med lengde 4. Regnestykket til Simen blir feil fordi han ikke deler hele linjestykket i fire like deler.

Figur 4

Skrive uttrykk på flere måter

Læreren kan også be elevene skrive uttrykket $\frac{3a+4}{4}$ på mange måter. Det ville sikkert komme mange ulike forslag i klassen som kan skrives opp på tavla og sammenlignes. Er de virkelig uttrykk for det samme? Elevene må få argumentere for sine forslag, uttrykkene må sammenlignes og vurderes. Det kan komme forslag som i figuren nedenfor.

$\frac{3a+4}{4}$	$\frac{3}{4}a+1$	$\frac{3a}{4}$	$3a+1$
$0,75a+1$	$\frac{6a+8}{8}$	$\frac{3a}{4}+4$	$3,4a+4,4$

Figur 5

Noen forslag er feil. Det er viktig å se på disse også, hvorfor er de feil? Klassen må bruke tid på å se hvilke som er riktige, hva som er feil og at de riktige uttrykkene faktisk er uttrykk for akkurat det samme.

Det kan være flere måter å kontrollere om to uttrykk er like.

- Man kan ta uttrykket man har kommet fram til og prøve å regne seg tilbake til det opprinnelige uttrykket.

- Eller man kan sette inn samme tall for den ukjente i begge uttrykkene og kontrollere om uttrykkene får samme tallverdi. Da må man være oppmerksom på at det kan finnes verdier for den ukjente som gir to uttrykk samme verdi uten at de er like. For eksempel vil $\frac{3a+4}{4} = 3a+1$ når a = 0. Men for å vise at to uttrykk *ikke* er like, er det tilstrekkelig å finne ett tall for den ukjente som gir de to uttrykkene ulik verdi.
- En tredje måte å kontrollere om to slike uttrykk er like, er å betrakte dem som funksjonsuttrykk og tegne dem i for eksempel GeoGebra. Da må vi skrive *x* i stedet for *a*. Vi får en graf for hvert uttrykk, og uttrykkene er like bare hvis grafene faller sammen.
- En fjerde måte kan være å prøve å visualisere uttrykkene slik det er vist ovenfor.

Er forståelsen og kunnskapen videreutviklingsbar?

Gjennom arbeidet med å lære dette terskelbegrepet ser vi at tidligere fragmentariske kunnskaper kobles sammen. Begrepet er integrativt, sammenhengen mellom begreper blir mer synlige og tidligere fragmentariske kunnskaper kobles sammen med det nye i begrepsinnholdet (Petterson og Brandell, 2017).

For eksempel må elevene forstå og kunne bruke den distributive lov «begge veier» for å løse oppgaven riktig. Elevene trenger også å forstå hva en faktor er og være sikre på hva som er forskjellen på et ledd og en faktor i et uttrykk. De må forstå at et uttrykk som telleren (3a + 4) kan betraktes som én faktor. Det kan sammenlignes med tall. Et primtall kan kun skrives som et produkt av 1 og seg selv, for eksempel kan vi skrive $3 = 1 \cdot 3$, og tilsvarende $3a+4 = 1 \cdot (3a+4)$. Mens sammensatte tall kan skrives som et produkt av flere faktorer, for eksempel $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ eller $12 = 4 \cdot 3$ eller $12 = 2 \cdot 6$, på samme måte som vi kan skrive $8x+4 = 4 \cdot (2x+1)$ eller $8x+4 = 2 \cdot 2 \cdot (2x+1)$ eller $8x+4 = 2 \cdot (4x+2)$.

I neste omgang dukker det opp brøker av typen $\frac{8x+4}{2x+1}$. Da må de se om de kan faktorisere uttrykkene i teller og nevner, for deretter å forkorte brøken.

Kom eleven gjennom overgangsfasen?

I mange av disse overgangene er det mulig for elever å lære seg en framgangsmåte som gir riktige svar og likevel ikke komme over terskelen. Det kan se ut som de forstår, men ved neste overgang viser det seg at de likevel ikke har forstått. Elevene har stor nytte av at vi bruker god tid på å gå i dybden med terskelbegrepene. Vi hjelper dem til dypere læring ved å la dem bruke ulike representasjoner. Og det er viktig at elevene ser og erfarer hvordan de ulike representasjonene henger sammen. De bør få ulike øvingsoppgaver hvor de bruker flere representasjoner og arbeider med sammenhengen mellom dem. De må utfordres til å forklare hvorfor de mener deres egen løsning er riktig, og de må kunne forklare hvorfor andre løsninger er feil. Når forståelsen er der, kan det være noen ferdigheter som bør øves slik at de automatiseres. Hvis de faktisk bare har lært noen regler og prosedyrer uten god forståelse, er ikke lærdommen elevene sitter igjen med videreutviklingsbar.

Brøkbegrepet er transformativt (Petterson og Brandell, 2017). I overgangen som er beskrevet ovenfor betyr det at når elevene har forstått begrepet, har synet på hva brøk er blitt forandret eller utviklet. De har forstått at en brøk kan inneholde algebrauttrykk, og at reglene for regning med brøk fortsatt gjelder. De har også forstått at når det er flere ledd i teller eller nevner, må vi betrakte et helt uttrykk som en faktor. Vi kan kanskje faktorisere uttrykkene, og det er bare faktorer som kan forkortes. Når elevene har fått denne forståelsen, oppfattes den som så selvfølgelig at den «gamle» forståelsen blir glemt, begrepet er irreversibelt (Petterson og Brandell, 2017).

Sannsynlighet

Klassen skal begynne å arbeide med sannsynlighet. Læreren har med terninger, og en kort samtale med elevene avklarer at det er seks sider på terningen og at sannsynligheten for å få et bestemt tall på terningen er $\frac{1}{6}$.

Men så sier plutselig en av elevene at hun nettopp hadde spilt Ludo, og hun hadde kastet terningen minst tjue ganger før hun fikk den første sekseren. Var det feil? Hvorfor er det slik?

Hvor ligger problemet?

Det er svært forvirrende for mange elever at vi angir en nøyaktig sannsynlighet, og så viser det seg at den ikke stemmer med den virkeligheten man opplever.

Når vi sier at sannsynligheten for å få et bestemt tall på terningen er $\frac{1}{6}$, er dette en teoretisk verdi. Mens vi kan erfare at vi for eksempel kan få mange ulike antall seksere på tjue terningkast. Antall seksere per antall kast kaller vi relativ frekvens, og den blir forskjellig i hvert forsøk. For mange elever er dette en konflikt som forstyrrer forståelsen, man kan beregne eller få angitt en sannsynlighet, men den sier tilsynelatende ingenting om realitetene.

Hvordan kan vi arbeide for å skape bedre forståelse?

Det er vel anvendt tid å la elevene få eksperimentere og gjøre seg erfaringer som kan utdype dette begrepet. La for eksempel elevene arbeide i par og kaste terning femti ganger og registrere hvor mange ganger de får fire på terningen. Hvor mange firere vil de forvente å få? Hvor stor andel av de femti kastene vil dette utgjøre? Det vil vise seg at antall firere varierer sterkt. Kan resultatet fra et forsøk være bedre eller riktigere enn et annet? Hvorfor blir det så forskjellig?

For å lettere kunne sammenligne resultater, kan dette være et passende tidspunkt å innføre begrepet relativ frekvens, som i dette tilfellet er antall firere delt på antall kast.

Man kan få opp på tavla alle resultatene fra forsøkene i klassen og undre seg over likheter og forskjeller. Så kan man legge sammen antall kast og antall seksere som alle elevparene har gjort og finne relativ frekvens ved å dividere totalt antall seksere på totalt antall kast. Her må vi være oppmerksom på at det ligger en mulighet for misforståelse: Den relative frekvensen for firere hos hvert elevpar kan skrives som en brøk. Når vi regner ut den relative frekvensen for alle kastene samlet, blir telleren summen av antall firere og nevneren blir summen av antall kast. Det må være tydelig at dette *ikke* er summen av de enkelte brøkene, men at det er en brøk vi får ved å telle antall firere og antall kast.

Hvor mange firere vil man nå forvente å få? Og hvor stor andel av kastene gir faktisk en firer, hvor stor er den relative frekvensen? Oftest kommer man nærmere det forventede antallet firere når antall kast økes.

Hva vil skje om vi kaster terningen enda flere ganger? Og enda flere? Kanskje har klassen tid og kapasitet til å prøve, kanskje ikke. Men mange elever vil bli med på et resonnement om at hvis vi tar svært mange terningkast, vil den relative frekvensen nærme seg den teoretiske sannsynligheten. Og kanskje vil noen ha hørt om «store talls lov», - det er et navn på fenomenet at jo flere forsøk vi gjør, jo nærmere kommer resultatet det vi teoretisk har forventet.

Er forståelsen og kunnskapen videreutviklingsbar?

Sannsynlighetsbegrepet er *transformativt* (Petterson og Brandell, 2017). Når man har forstått sammenhengen mellom relativ frekvens og teoretisk sannsynlighet, opplever man ikke lenger at det er noen konflikt mellom de to begrepene. Man må finne aktiviteter som gjør denne konflikten synlig og hjelpe elevene til å se og forstå sammenhengen.

Uten en god forståelse av sammenhengen mellom relativ frekvens og teoretisk sannsynlighet, kan elevene lett komme til å lære seg en del regler for regning med sannsynligheter uten at det samsvarer med den oppfatningen de har av hva sannsynlighet er.

Begrepene «sannsynlighet for», «sjanse for» og «risiko for» brukes synonymt. I svært mange sammenhenger hører vi om sannsynligheter som har blitt bestemt ved hjelp av relativ frekvens og empiriske data. Hvordan finner man f.eks. sannsynligheten for at et barn blir gutt? - eller for å få lungekreft hvis man røyker 10 sigaretter om dagen? - eller for at flyet man sitter i skal styrte og man dør? Beregningene er gjort ut fra registreringer og innsamling av data på ulike måter. Det kan være nyttig å forstå så mye at man kan stille seg kritisk til slik informasjon. For eksempel har det betydning hvor stort utvalg som er undersøkt, og om utvalget er representativt.

Kom eleven gjennom overgangsfasen?

Elever som går videre i matematikk og lærer mer om sannsynlighet, vil se tydeligere at to disipliner her kobles sammen. På den ene siden er det sannsynlighetsregning med teoretisk begrunnede sannsynligheter som matematiske modeller. På den andre siden er det statistikk og empirisk sannsynlighet som analyserer og tolker tallfestede data. Empirisk sannsynlighet er basert på registrering av virkelige hendelser. Man bruker de teoretiske sannsynlighetsmodellene til å beregne sannsynligheter innenfor begge disiplinene. Elevene må ha forstått denne forskjellen og sammenkoblingen, da først vil mange oppgaver og problemer gi mening.

Konklusjon

Som lærere må vi være spesielt oppmerksomme når elevene arbeider med terskelbegrep. Vi må ha i tankene at det er vanskelige begrep å forstå, det kan være krevende å komme over terskelen fra en enklere og mer umoden forståelse som eleven har med seg fra før.

Den nye forståelsen kan endre elevenes syn på et matematisk område. En dypere forståelse kan gjøre at man knytter nye mentale bilder til begrepet og man kan assosiere det med anvendelser man ikke har vært oppmerksom på tidligere.

En dypere forståelse kan synliggjøre sammenhenger mellom kunnskap som tidligere har vært fragmentarisk, flere brikker i forståelsen kan falle på plass og danne et mer komplett bilde. Men når begrepet først er forstått, er det naturlig at det oppfattes som helt selvfølgelig.

Læreren må huske at det som for han/henne nå oppfattes som helt selvfølgelig, ikke nødvendigvis oppleves slik for elevene. Man må være oppmerksom på at elever ikke ennå har utviklet samme forståelse for det som virker så selvsagt. Det å tenke på terskelbegrep og overgangsfaser kan hjelpe læreren til å se hvor eleven står i sin forståelse og læring.

Ikke minst må læreren være klar over at arbeid med slike begreper tar tid. Elevene trenger mange og varierte erfaringer med begrepet, de trenger å bruke ulike representasjoner og å se sammenhengen mellom dem. Det må brukes nok tid til å arbeide med terskelbegrepene, slik at når man senere kommer tilbake til begrepet og skal utvide innholdet og forståelsen, kan man bygge på en forståelse som allerede er etablert.

Referanser

Å utvikle elevers begrepsforståelse Kerstin Pettersson og Gerd Brandell, 2017