Problemløsing

Hva er problemløsing, og hvordan skiller det seg fra arbeid med vanlige matematikkoppgaver? Hva kjennetegner en god problemløser?

Ingvill Merete Stedøy
Ingunn Valbekmo
MATEMATIKKSENTERET, NTNU

SEPTEMBER, 2018

REALFAGSLØYPER

REALFAGSLØYPER

NATURFAGSENTERET
NASJONALT SENTER FOR NATURFAG I OPPLÆRINGA

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Innholdsfortegnelse

REALFAGSLØYPER

Hva er et problem?

Et problem er bare et problem (slik som matematikere bruker ordet) hvis du ikke vet hva du skal gjøre for å løse det. Et problem som ikke har noen «overraskelser» i seg, og kan løses greit rutinemessig eller med kjente fremgangsmåter (uansett hvor vanskelig det er) er en vanlig oppgave. (Schoenfeld (1983), s. 41. Oversatt av forfatterne)

Ekte problemer krever den ekstra logiske prosessen med kreativitet, innsikt, overblikk og AHA! (Liljedahl (2016), s. 19. Oversatt av forfatterne)

Problemløsing har vært nevnt i læreplanene i matematikk siden mønsterplanen i 1987. I over 45 år har matematikkdidaktikere vært interessert i å forstå hva problemløsing er, og hvordan det skal undervises i problemløsing. I fagfornyelsen som er igangsatt av Utdanningsdirektoratet (2018) er kjerneelementene i matematikk sentralt. Det første av seks områder som inngår i kjerneelementene er *utforsking og problemløsing.* Det betyr at problemløsing er like aktuelt i dag som i 1987. Det er viktig for lærere å forstå hva problemløsing er, hvordan de kan bruke oppgaver til problemløsing, og hvordan de skal inspirere, veilede og vurdere elevene når de skal arbeide med problemløsing.

Problemløsing har ofte blitt knyttet til anvendelser av matematikk, og det å kunne bruke matematikken du har lært til å løse ukjente problemstillinger. Den engelske komiteen rundt W. H. Cockroft (1982) hevder at:

> *Evnen til å løse problemer er i hjertet av matematikken. Matematikk er bare «nyttig» i den grad den kan anvendes i spesielle situasjoner, og det er evnen til å anvende matematikk i ulike situasjoner vi vil kalle «problemløsing».*
>
> *På hvert nivå i matematikkundervisningen må læreren hjelpe elevene til å forstå hvordan de skal anvende begreper og ferdigheter som de har lært, til å løse problemer. Problemene skal knyttes både til anvendelser fra dagliglivet innenfor elevenes erfaringsverden, og også til ukjente situasjoner.*
> (Cockroft (1982), s 73. Oversatt av forfatterne)

Etter hvert har det blitt etablert en felles forståelse for at *problemløsing i matematikk betyr å finne en løsningsmetode og en strategi for å løse ukjente problemstillinger i ukjente sammenhenger*. Det skal være en situasjon eleven ikke tidligere har møtt, og som hun derfor ikke har noen opplagt og bestemt metode for å løse. Det kan innebære å velge en god matematisk modell som vil være redskap til å løse problemet, og da er vi inne i det andre området i kjerneelementer i matematikk, nemlig *modellering og anvendelser.* Det vil ikke være fokus i denne artikkelen.

Det er ikke nødvendigvis selve oppgaven som definerer om det er problemløsing, men snarere forholdet mellom problemløseren og problemet. Noe som kan være en rutineoppgave for én elev eller et klassetrinn, kan fungere som en problemløsingsoppgave for en annen elev eller på et lavere klassetrinn.

For eksempel vil oppgaver om maksimering vil være problemløsing og utforsking for elever i ungdomstrinnet, mens det vil være rutineoppgaver med derivasjon for elever i R1 i videregående skole.

Problemløsingsprosessen

Tidligere fokus på problemløsing handlet mest om løsningsprosessene (Pólya, 1957), men i den senere tid har fokus blitt flyttet mer over til egenskaper som problemløseren må ta i bruk for å løse et problem. Når problemer skal løses er det mange ting som spiller inn, som kunnskaper, kontroll og klasseromskulturen i tillegg til affektive faktorer som holdninger, følelser og oppfatninger om hva matematikk er.

Når et problem skal løses, er det ikke bare fasene i problemløsing slik Pólya identifiserte dem som er viktige, men også hvordan disse kan måtte brukes igjen og igjen på samme problem, som en slags syklus (Carlson & Bloom, 2005). Pólya sier:

> *[Først,] må vi se tydelig hva som kreves. Deretter må vi se hvordan ulike deler henger sammen, hvordan det ukjente kobles til det som er gitt av opplysninger, slik at en kan få en idé om hvordan problemet kan løses og lage en plan. Som nummer tre skal planen gjennomføres. Som nummer fire, ser vi tilbake på løsningen, går gjennom den på nytt og diskuterer den.* (Pólya, 1957, s 5 – 6. Oversatt av forfatteren)

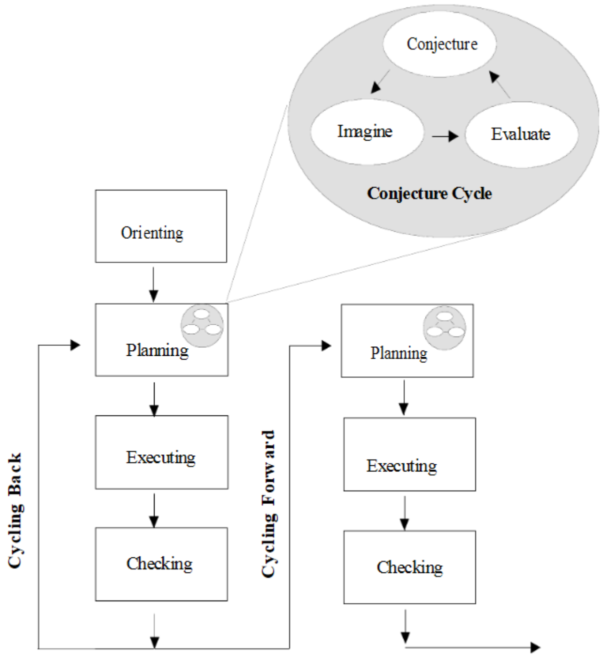
Lampert (1990) sier at det viktigste kriteriet på et godt problem er at det kan engasjere alle til å formulere og teste matematiske hypoteser. Ved å arbeide med problemløsing, kan elevene imitere arbeidsmåten til fagmatematikere, og få en riktig forståelse av hva matematikk er. De skal *gjøre* matematikk. Da må læreren finne problemer som vil skape diskusjoner og engasjement og åpne veien for matematiske begreper, representasjoner og arbeidsmåter. Elevene skal undersøke, gjøre antagelser, begrunne, reflektere og stille nye spørsmål innenfor det området problemet tar opp. Hva hvis … (Breiteig, 2008).

Problemløsing bør være arenaen der alle tråder av matematisk kunnskap konvergerer. Det bør gi muligheter for elevene til å veve sammen kunnskapstrådene og for lærere til å vurdere *elevenes arbeid/prestasjoner (performance) med alle trådene* (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

(Med tråder menes her de fem trådene som til sammen skal utgjøre matematisk kompetanse, definert av Kilpatrick. Det er resonnement, anvendelse, forståelse, engasjement og beregning, les mer her.)

Schoenfeld (1985) identifiserer hvordan fagmatematikere skiller seg fra flinke studenter når de arbeider med problemløsing. Det er fagmatematikernes evne til problemløsing som gjør den store forskjellen. Det vises ved måten de jobber seg gjennom problemene på og hvordan de resonnerer, korrigerer seg selv, tar skisser og uformelle notater underveis i løsningsprosessen. Han sier at prosesser for å gjennomføre problemløsing er absolutt sentrale i enhver diskusjon om matematisk prestasjon.

Vi kan lære hvordan elevene kan trenes opp til å bli gode problemløsere ved å se hvordan fagmatematikere løser problemer. Også Carlson og Bloom (2005) gjennomførte et studium der de presenterte fem forskjellige problemløsingsoppgaver for tolv matematikere. Oppgavene krever ingen avanserte matematikkunnskaper, men var ukjente for matematikerne. Hensikten var å teste ut en modell for å beskrive den sykliske naturen for problemløsing. De mener å ha identifisert fire faser som kan gjenkjennes i problemløsing. Disse fasene kan gå i sykler, helt til problemløseren har funnet en løsning, eller eventuelt gir opp. De fire fasene er gjengitt nedenfor og forklart og oversatt i appendiks 1. Fasene kan kjennes igjen fra Polyas beskrivelse, men her presiseres det at det normale vil være å gå flere runder gjennom de fire fasene. Figuren nedenfor viser en modell for den sykliske prosessen ved problemløsing (Carlson & Bloom, 2005, s. 13).



Figur 1: Problemløsningssyklusen

Underveis i prosessen, vil også ulike affektive situasjoner oppstå. Disse er med på å påvirke problemløseren, og enten gi motivasjon, selvtillit og glede, eller frustrasjon, mismot og kanskje føre til angst eller mangel på selvtillit og tro på egne evner. Det kan altså gi problemløseren ekstra lyst til å bruke tid på matematikk eller det motsatte.

For at det siste ikke skal bli resultatet, er lærerens rolle underveis og etter en slik undervisningssekvens avgjørende for at elevene skal beholde og til og med øke sin motivasjon for faget. Ros og oppmuntring, samt anerkjennelse for å være utholdende, blir viktig. I tillegg må elevene forstå at feilsvar og valg av uhensiktsmessige metoder er viktige ledd i læringsprosessen. Det er helt nødvendig for å bli en god problemløser.

Matematikerne hadde et fagsyn som ble tydeliggjort i løpet av deres arbeid med problemløsningsoppgavene. De mente at det å arbeide med matematikk krever at man selv sorterer informasjon, er utholdende og godtar å gjøre feil på veien mot endelig å komme fram til en riktig løsning.

Utholdenhet er en viktig egenskap for å bli en god problemløser. Frustrasjonene underveis i prosessen bør i størst mulig grad ende i suksess og følelse av mestring hvis eleven skal være villig til å engasjere seg i problemløsing på nytt. Hvordan skal læreren legge til rette for at «slitet» skal ende med suksess?

Resultatene til Carlson og Bloom viser at selv fagmatematikerne måtte gå flere runder i problemløsingssyklusen. Det var veldig sjelden at de gikk gjennom fasene direkte og bare en gang. Dette må vi lære elevene å akseptere også.

Noen av matematikerne klarte å løse problemene, andre kom ikke fram til riktig løsning. Dette førte med seg ulike affektive reaksjoner, både glede, iver, frustrasjon og følelse av flauhet. Det som karakteriserte alle matematikerne, var at når de hadde gjennomført beregningene, begynte de straks å validere og sjekke om resultatet kunne være riktig. De innså flere ganger at det ikke stemte, og gikk tilbake til planleggingsfasen. Underveis reflekterte de over effektiviteten av metodene sine. Dette gjorde de i alle fasene, noe som førte til at de sporet seg selv i en produktiv retning for å komme fram til en løsning. De stilte seg selv spørsmål som «får denne metoden meg nærmere en løsning» og «Hva sier dette meg?».

Denne formen for selvsjekk er viktig å øve opp hos elever i skolen også. Vi sliter med å få elevene til å gjennomføre valideringsfasen på egenhånd. De går ofte direkte til fasiten eller spør læreren om de har fått riktig svar, istedenfor å gjennomføre valideringen selv eller i samarbeid med andre elever.

Problemløserens egenskaper

Breiteig (2008) viser til Pólya som understreker verdien av å arbeide induktivt ved læring av matematikk. Det innebærer å stille spørsmål ved observasjoner og generaliseringer.

> *Det krever intellektuelt mot: å være klar til å revidere sin oppfatning. Det krever ærlighet: å kunne endre oppfatning når det kommer fram en god grunn til det. Det krever standhaftighet: å ikke endre oppfatning uten at det er god grunn til det og etter å ha undersøkt nøye.* (Breiteig, 2008)

Alt dette finner vi igjen hos matematikerne som skulle løse oppgavene til Carlson og Bloom (2005), og dette vil vi skal karakterisere elevene når de arbeider med matematikk og problemløsingsoppgaver.

Det finnes en del egenskaper som kjennetegner en god problemløser. Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina og Bruder (2016) systematiserer disse egenskapene inn i fem kategorier.

Den første kategorien hos Liljedahl et al. (2016) er *reduksjon.* Reduksjon handler om å redusere problemet ned til det essensielle på en fornuftig måte. Til det brukes ofte visualisering og strukturering i form av figurer, tabeller, løsningsgrafer og begreper.

Den andre kategorien hos Liljedahl et al. (2016) kalles *reversibilitet*. I denne kategorien finner vi egenskaper hos problemløsere som gjør dem i stand til å reversere tankegangen ved å tenke baklengs. Dette bør gjøres automatisk for å se om de har mistet en viktig opplysning eller feiltolket noe.

Den tredje kategorien med egenskaper som kjennetegner gode problemløsere er å kunne se problemet fra *ulike innfallsvinkler.* Det vil si at en kan se problemet fra ulike sider og raskt gjenkjenne variabler og avhengighet, og kunne vurdere dem effektivt. Det innebærer også å holde fast på en idé som virker fornuftig, selv om det fører til vanskelige matematiske utfordringer.

Den fjerde kategorien kaller Liljedahl et al. (2016) *å endre innfallsvinkel.* Innenfor denne kategorien må problemløseren kunne endre antagelser eller forutsetninger for å komme fram til en løsning, eller å se problemet fra et annet perspektiv for ikke å bli sittende fast. En annen egenskap i denne kategorien er å være villig til å prøve andre framgangsmåter.

Den femte og siste kategorien i Liljedahl et al. (2016) sin oversikt over egenskaper som kjennetegner gode problemløsere kalles *overføring.* Denne kategorien omfatter egenskaper som gjør problemløseren i stand til å kunne overføre velkjente løsningsstrategier fra et problem til et annet, ofte i en helt annen kontekst. Det vil være viktig å kunne kjenne igjen matematikken i problemet, uavhengig av konteksten.

Konklusjon

Når du som matematikklærer skal legge til rette for at elevene dine skal bli gode problemløsere, er det altså mange ting du må tenke på. Oppgaven må være av en sånn utforming at løsningsmetodene ikke er tydelig for elevene når de leser eller får presentert oppgaven. Det er en fordel hvis det er flere måter å løse oppgaven på, samtidig som du som lærer kanskje har en bestemt metode du tenker er mest naturlig. Elevene skal få rom til å diskutere ulike strategier, og de skal oppmuntres til å vurdere de ulike metodene opp mot hverandre. Hvilke er mest hensiktsmessig, hvilke fører fram, hvilke kan brukes i andre situasjoner, hva kan vi lære av de ulike metodene, hvilken matematikk ligger bak, og så videre.

Det vil også være viktig å tenke på det artikkelen beskriver som kjennetegn på gode problemløsere. Elevene må motiveres til å være utholdende, til å kontrollere seg selv, både underveis i løsningsprosessen og når de anser oppgaven for å være løst. De må oppmuntres til samarbeid, og til å dele sine idéer og forslag.

For å få plass alt dette, er det viktig at elevene får et stort repertoar av strategier å velge mellom. Dette blir tema for neste pakke om problemløsingsstrategier.

Referanseliste

Breiteig, T. (2008). Problemløsning som inngangsport til matematikk. *Tangenten, 1*, 35-40.

Carlson, M. P. & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational studies in Mathematics, 58*, 45-75.

Cockroft, W. (1982). Mathematics counts. I: HM Stationary Office for Ministry of Education.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping students learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational research journal, 27*, 29-63.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. I *Problem Solving in Mathematics Education* (s. 1-39). Springer.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (2nd ed)*. Garden City, N.Y: Doubleday.

Schoenfeld, A. H. (1983). The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: a review of sorts. *For the learning of mathematics, 3*, 40-47.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving* Academic press, inc.

Vedlegg

Appendix 1

De fire fasene i problemløsingssyklusen (Carlson og Bloom, 2005, oversatt av artikkelforfatteren). I tillegg har vi tatt med *monitoring,* som Carlson og Bloom tenker på som refleksjon og justering av egen tankeprosesser og resultat på hver del av løsningsprosessen. Det affektive er tatt med for å understreke at elevene må få lov til å uttrykke alle typer følelser under problemløsningsprosessen.

Orientering – gi mening, organisering, konstruering

Anstrengelse og energi brukes til å forstå problemet

Anstrengelse for å få klarhet i informasjonen som er gitt i form av tabell, graf, diagram eller tekst

Organisering av informasjonen

Mål blir satt og tydeliggjort

Mål blir satt og representert med symboler, tabeller, figurer

Diagram blir laget

Planlegging – hypoteser, tankeeksperiment, testing

Matematiske begreper, kunnskaper og fakta blir hentet fram og vurdert

Forskjellige løsningsstrategier blir vurdert

En hypotese blir formulert

Analysering og betraktning av en løsningsmetode tenkes ut

En tilnærming til løsning, metode bestemmes

Utførelse – Beregninger og konstruksjoner

Valg og gjennomføring av ulike prosedyrer og begrunnelser for valgene

Etablering av logiske sammenhenger mellom matematiske utsagn

Utføre beregninger

Bevis, begrunnelser og argumentasjon/ forsøk på å tilpasse ny informasjon til eksisterende skjema

Validering/kontroll av antagelsene og hypotesene

Sjekking – verifisering

Resultatene sjekkes for å se om de gir mening

Beslutninger tas i forhold til gyldigheten av svaret

Problemløseren går tilbake og prøver på nytt, eller går videre avhengig av resultatet av sjekkingen

Monitoring

Refleksjon over hvor effektive de ulike metodene er

Refleksjon over hvor relevante og effektive resonnementene er

Innsats for å være mentalt engasjert

Affektive reaksjoner

Glede

Stolthet

Frustrasjon/Sinne

Matematisk integritet (ikke noe «juks og fanteri»)

Appendix 2

Mulige problemløsingsoppgaver:

1: Et rektangel har omkrets 100. Hva er det største arealet rektangelet kan ha?

Metode:

- *Prøve seg fram*
- *Bestemme et funksjonsuttrykk og tegne en graf. Lese av makspunkt.*
- *Bestemme et funksjonsuttrykk, derivere for å finne makspunkt.*

2: To trekanter like lang grunnlinje og like stor høyde. Har de samme areal og omkrets?

Fra Adresseavisens Abelkonkurranse, (Stedøy 2002):

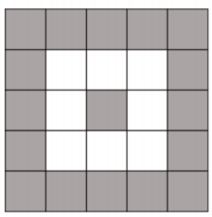
3: Snekkeren: En snekker snekret trebente stoler og firbente bord. En dag hadde han brukt 31 ben. Hvor mange stoler og hvor mange bord kan han ha laget? Forklar hvordan du kommer fram til svaret.

4: Flaskehals: En flaske som rommer 1/3 liter er fylt ¾ full med vann. Vi heller ut vann slik at det er 1/5 liter vann igjen i flaska. Hvor mye vann er helt ut? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Fra Kenguru-konkurransen, 2014, kan brukes med eller uten svaralternativ:

5:

4) Hvor mange flere grå ruter enn hvite er det på bildet?



6 7 8 9 10

Fra Kenguru-konkurransen, 2018, kan brukes med eller uten svaralternativ:

6:

23. Elevene i en klasse har lest bøker. Det er en blå, en gul og en grønn bok.
20 elever har lest den blå boka.
14 elever har lest den gule boka.
18 elever har lest den grønne boka.
10 elever har lest alle de tre bøkene. 8 elever har lest to av bøkene, og resten har bare lest ei bok.

Hvor mange elever er det i klassen?

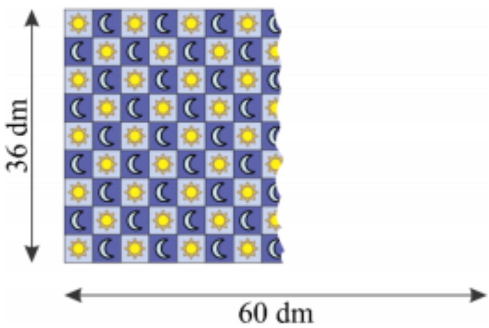
(A) 18 (B) 20 (C) 22 (D) 24 (E) 30

Fra Kenguru-konkurransen, 2013, kan brukes med eller uten svaralternativ:

7:

16. Petter kjøpte et teppe som er 36 dm bredt og 60 dm langt. Teppet er satt sammen av små kvadrater med et bilde av enten en sol eller en måne. På bildet ser vi at det er 9 kvadrater i bredden. Teppet er rullet sammen slik at vi ikke kan se hele lengden.

Hvor mange måner er det på hele teppet?



A) 60 **B)** 63 **C)** 65 **D)** 67 **E)** 68

Fra matematikk.org:

8: Hva er de tre neste tallene i tallrekka?

4 – 12 – 6 – 24 – 8 – 40 – 10 – ? – ? – ?

Papirbretteproblemet, fra Carlson og Blooms forskning:

9:

En kvadratisk papirbit, ABCD, er hvit på den ene siden og svart på den andre siden. Arealet av kvadratet er 3 cm^2. Hjørne A brettes over til punkt E, som ligger på diagonalen AC, slik at det totale arealet som er synlig har et areal hvor ½ cm^2 er hvit og ½ cm^2 er svart. Hvor langt er det fra E til den brettede linja?

Flere oppgaveideer og løsningsforslag kan dere finne her:

Adresseavisens abelkonkurranse:

https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/product/Adresseavisens%20Abelkonkurranse.pdf

Kengurukonkurransen:

https://www.matematikksenteret.no/konkurranser/kenguruoppgaver

Breiteig (2008):

http://www.caspar.no/artikkel_pdf/35c_t2008-1.pdf.

Hefte med problemløsingsoppgaver fra matematikk.org:

http://www.matematikk.org/binfil/download2.php?tid=83942&h=c8ec261d0ffa8ace1be7aee45247b363