REALFAGSLØYPER

Dybdelæring i matematikk

APRIL 2018

NATURFAGSENTERET
NASJONALT SENTER FOR NATURFAG I OPPLÆRINGA

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Mona Nosrati og Kjersti Wæge
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET (NTNU)

Innholdsfortegnelse

Dybdelæring

I 2013 fikk Ludvigsenutvalget i oppdrag å vurdere innholdet i fagene i grunnskolen opp mot krav til kompetanse i et framtidig samfunns- og arbeidsliv[1]. Som et resultat av faggjennomgangen konkluderte utvalget med at innholdet i skolen er for omfattende og fragmentert. Dette gjelder også for matematikkfaget. For å bedre læringsutbyttet, anbefalte Ludvigsenutvalget at skolen heller bør konsentrere seg om dybdelæring i noen sentrale og grunnleggende byggesteiner i fagene[2].

Men hva er egentlig dybdelæring? Begrepet har kommet sterkt på banen de siste årene, men det finnes forskjellige beskrivelser av hva det egentlig er og hvordan det kan oppnås.

I denne artikkelen tar vi utgangspunkt i følgende tabell som Ludvigsenutvalget bruker i sitt kunnskapsgrunnlag[1], der dybdelæring settes i kontrast til overflatelæring:

Dybdelæring	Overflatelæring
Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.	Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.
Elever organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen.	Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.
Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.	Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.
Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.	Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læringsprosess.	Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier.

Kilde: Sawyer 2006, utvalgets oversettelse

TABELL 1

Overflatelæring karakteriseres ved at elevene jobber med ny kunnskap uten å koble det til hva de kan fra før. Fakta og prosedyrer memoreres uten refleksjon og forståelse og elevene har problemer med å overføre det de har lært til nye situasjoner og problemstillinger.

Dybdelæring derimot innebærer at elevene gradvis og over tid utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fag. Elevenes læringsutbytte øker når de utvikler en helhetlig forståelse av fag og ser sammenhenger mellom fag, samt greier å anvende det de har lært til å løse problemer og oppgaver i nye sammenhenger[3]. Elevene er i stand til å regulere egen læringsprosess, bruke relevante læringsstrategier og reflektere over egen læring.

[1] NOU 2014:7 Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskapsgrunnlag
[2] NOU 2015:8 Fremtidens skole — Fornyelse av fag og kompetanse
[3] Meld. St. 28, Fag-Fordypning-Forståelse, s. 14

REALFAGSLØYPER

Dybdelæring i matematikk – fem komponenter

Det kan være vanskelig å gi en nøyaktig og fullstendig definisjon av hva dybdelæring i matematikk egentlig er. Det kommer selvfølgelig an på hvordan man definerer dybdelæring mer generelt.

Med utgangspunkt i tabell 1 på forrige side, trekker vi i denne artikkelen frem fem sentrale komponenter i den matematiske læringsprosessen som kan beskrive hva dybdelæring i matematikk kan være.

Komponentene vi beskriverer er hentet fra og satt sammen av forskjellige forskningsbaserte og praksisnære modeller for læring i matematikk, inkludert Kilpatrick og hans kollegers trådmodell for matematisk kompetanse (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001), beskrivelser av relasjonell og instrumentell forståelse (Skemp, 1976), begrepsmessig og prosedyremessig kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986), samt mange års forskningsresultater om metakognisjon og selvregulering i den matematiske læringsprosessen (Flavell, 1976; Schneider & Artelt, 2010).

1 Begrepsmessig forståelse

Begrepsmessig forståelse innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Begrepsmessig forståelse handler om å kunne mer enn isolerte fakta og regler. Det innebærer å forstå hvorfor en matematisk ide er viktig og å knytte nye ideer til matematiske ideer som man allerede har møtt på fra før. Begrepsmessig forståelse er rik på relasjoner, og de bindende relasjonene gjennomsyrer – og er like viktige som – de individuelle bitene med fakta og informasjon. Fordi fakta og metoder som er lært med forstålse er knyttet sammen, er de lettere å huske og bruke og de kan rekonstrueres hvis man glemmer dem.

Elever som har utviklet begrepsmessig forståelse er i stand til å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner, og de kan velge representasjoner som er nyttige i en gitt situasjon.

For eksempel: Elever som forstår divisjon av brøk kan ikke bare regne ut $6 : \frac{2}{3} = 9$, de kan også representere operasjonen ved hjelp av figurer og lage regnefortellinger som passer til regnestykket.

2 Prosedyrekunnskap

Prosedyrekunnskap handler om å ha kunnskap om ulike matematiske prosedyrer og å kunne utføre dem nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. Elever som utfører prosedyrer fleksibelt, kan veksle mellom forskjellige prosedyrer og velge den som er mest hensiktsmessig i en gitt situasjon.

Prosedyrekunnskap innebærer en viss grad av automatisering (gjerne gjennom å utnytte mønstre og underliggende prinsipper), og dette er avgjørende for å frigjøre kapasitet i arbeid med en matematisk problemstilling. Likevel er det viktig å understreke at prosedyrekunnskap bør følges av begrepsmessig forståelse. Elever bør ikke bare vite hvordan en prosedyre skal gjennomføres – de bør også vite hvorfor den er gyldig.

Prosedyrekunnskap og begrepsmessig forståelse er to sentrale begreper som vi finner i store deler av forskningslitteraturen som omhandler god læring og undervisning i matematikk. Beskrivelsene av prosedyrekunnskap og begrepsmessig forståelse er nært knyttet til det som Skemp (1976) har kalt henholdsvis instrumentell og relasjonell forståelse. Skemp bruker følgende eksempel for å illustrere forskjellen mellom de to typene forståelse:

En person med en rekke bestemte instrukser kan finne veien fra et startpunkt til en rekke endepunkt. Instruksene forteller hva som må gjøres hver gang et valg må tas: Ta til høye ut døren, gå rett forbi kirken og så videre. Men hvis denne personen gjør en feil i forhold til instruksene på noe tidspunkt, så vil hun gå seg bort. Derimot vil en person med et mentalt kart over byen ha noe som kan brukes - etter behov – til å lage et nærmest uendelig antall ruter som kan følges fra startpunkt til endepunkt, så lenge disse ligger på hennes mentale kart. Og hvis hun tar en feil vei, vil hun fortsatt vite hvor hun er og dermed kunne finne frem dit hun skal. Kanskje kan hun også lære om og ha glede av omgivelsene i prosessen.

Analogien mellom dette og læring i matematikk er nokså tett. Elever som har utviklet prosedyrekunnskap har lært en rekke bestemte instrukser som de kan bruke for å komme seg fra spesifikke startposisjoner (oppgaver) til endepunktene (svarene på oppgavene). Elevene har ikke utviklet en forståelse av de underliggende relasjonene mellom de forskjellige stegene og endepunktet, og de er avhengige av ekstern veiledning for å lære seg måter å “komme seg frem” på. I motsetning til dette har elever med begrepsmessig forståelse bygd mentale strukturer slik at de kan lage mange forskjellige planer for å komme seg fra et punkt til et hvilket som helst annet punkt.

Prosedyrekunnskap og begrepsmessig forståelse betraktes ofte som to motsatte poler som konkurrerer om oppmerksomheten i skolematematikken. Men å sette dem mot hverandre skaper en falsk dikotomi og en antagelse om at prosedyrekunnskap er verdiløs. Tvert imot, så vil slik kunnskap være nyttig og nødvendig i mange sammenhenger. Prosedyrekunnskap og begrepsmessig forståelse henger tett sammen og støtter hverandre, og forskning fremhever betydningen av en integrert og balansert utvikling av begreper og prosedyrer i den matematiske læringsprosessen.

3 Anvendelse

Anvendelse eller strategisk tankegang innebærer å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemer, representere dem på ulike vis, utvikle en løsningsstrategi og vurdere hvor rimelig en løsning er. Med matematiske problemer menes det her problemer fra hverdagen/samfunnet der matematikk kan anvendes, og også mer abstrakte matematiske problemer og spørsmål. Denne komponenten omhandler det som i forskningslitteraturen kalles problemløsning.

For å bli effektive problemløsere, må elevene lære å danne mentale representasjoner av problemene, finne matematiske sammenhenger og utvikle nye løsningsmetoder når det er nødvendig. Fleksibilitet er avgjørende gjennom hele problemløsningsprosessen.

For eksempel kan elever bruke tallkombinasjoner de kjenner for å finne svar på tallkombinasjoner de ikke kjenner: Fordi multipler av 5 er relativt enkle å lære, kan elevene bruke sin kunnskap om $5 \cdot 8$ til å finne $6 \cdot 8$. Det er $(5 \cdot 8) + 8$.

4 Resonnering

Resonnering handler om å kunne forklare hvordan man tenker, kunne følge med i et logisk resonnement og kunne vurdere dets gyldighet. Videre innebærer resonnering å kunne se og begrunne sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og framgangsmåter.

Det handler også om å kunne argumentere for gyldigheten av en hypotese ved å utforme et resonnement, gjerne ved å ta utgangspunkt i noe som er kjent og bygge opp veien mot det som er ukjent og skal undersøkes.

Et eksempel på en elevforklaring kan være: Jeg vet at 4 · 6 er 24, fordi jeg kan firegangen. Og i 8 · 6 har vi fire grupper til av seks. Så 8 · 6 er 24 pluss 24 og det er 48.

5 Metakognisjon og selvregulering

Metakognisjon handler om det å kunne ta et (mentalt) steg tilbake fra det man holder på med eller lærer om og bevisst tenke gjennom egne fremgangsmåter og kognitive prosesser. Det handler om å kunne reflektere over hensikten med det man lærer, hva man har lært, og hvordan man lærer[4].

En ting som kjennetegner eksperter i de fleste fagfelt - og det gjelder ikke minst i matematikk - er at de vet når de ikke kan eller ikke forstår noe. De vet også at i slike tilfeller må de velge og ta i bruk passende strategier for å finne relevant informasjon som kan hjelpe dem med å utvikle den manglede forståelsen.

Når en elev begynner å bli bevisst sine egne læringsprosesser og strategier, står han også i en god posisjon til å gå inn og *regulere* dem. Selvregulering handler om hvordan eleven kan *styre* sine egne læringsprosesser. Strategier som elever kan bruke for å styre egen læring omfatter blant annet det å

- Sette seg mål (dette kan være alt fra en gitt karakter i matematikk til det å få oversikt over et tema som man vet at man ikke helt har forstått)
- Sette seg delmål på veien til et større mål dersom det er nødvendig.
- Overvåke fremgang (nærmer man seg de målene man har satt seg?)
- Endre både lærings- og problemløsningsstrategier, hvis de man har tatt i bruk ikke gir ønsket resultat.

Oppsummering

I den matematiske læringsprosessen må de fem komponentene beskrevet over støtte hverandre og utvikles parallelt. Disse komponentene kan da på hver sin måte bidra til det som karakteriserer dybdelæring slik som beskrevet i tabell 1.

[4] NOU 2014:7 Elevens læring i fremtidens skole

REFERANSER

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American psychologist, 34*(10), 906.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, *2*, 1-27.

NOU 2014: 7 Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskapsgrunnlag

NOU 2015: 8 Fremtidens skole — Fornyelse av fag og kompetanser

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM, 42*(2), 149-161.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.